A 36. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2005 — Einstein emlékév

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2005-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 38-ik, ezúttal már nyolcadszor nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2005. október 28 – november 7.

2005. a Fizika Éve. Ebben az évben emlékezünk Albert Einstein 100 éve született korszakalkotó felfedezéseire. Ezért az idei Ortvay versenyt is Einstein emlékének szenteljük: valamennyi feladatunk kapcsolódik Einstein gazdag életművéhez, az általa felvetett és/vagy megoldott kérdésekhez, illetve az e területeken azóta bekövetkezett fejleményekhez.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2005. október 28-án, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeX, pdf és Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX PDF vagy Postscript formátumban) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@elte.hu

Beadási határidő: 2005. november 7. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 7-én és 8-án lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó 1., 2. és 3. díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

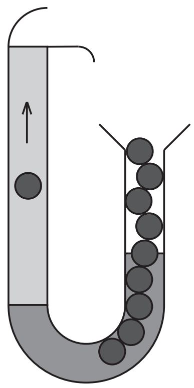
A verseny eredményhirdetése december 8-án lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. Mint tudjuk, Einstein szabadalomvizsgálóként is dolgozott. Egyszer egy örökmozgóval érkezett hozzá egy „feltaláló”. A szerkezet lelke egy U alakú cső volt, melynek bal oldali szára magasabb volt, jobb oldali szára pedig alacsonyabb. A bal oldalra víz volt töltve, a jobb oldalra pedig egy víznél nagyobb sűrűségű folyadék.

   A közlekedő edények elve alapján a bal oldalon magasabban állt a folyadék szintje, mint a jobb oldalon. A szerkezethez tartoztak még fagolyók is, melyeknek sűrűsége kisebb volt mindkét folyadék sűrűségénél. A jobb oldali csőbe több fagolyó is be volt szórva. A fagolyók átmérője csak kicsivel volt kisebb, mint a cső sugara, ezért a golyók egymáson helyezkedtek el, és egymást nyomták. A jobb oldali csőben annyi golyó volt, hogy a folyadékból kilógtak, viszont a legalsó golyó már annyira belemerült a folyadékba, hogy átbillent az U alakú cső bal oldali szárába, és ott felúszott a felszínre. Mivel a bal oldali folyadékszint jóval magasabban volt, mint a jobb oldali, ezért felúszva a felszínre, onnan le tudott esni. Esés közben egy lapátkereket meghajtva hasznos munkát is végzett, majd visszaesett a cső jobb oldali szárába, azaz ráesett a többi golyó tetejére, aminek következtében a legalsó golyó megint átbillent a bal oldalra, és kezdődött az egész elölről!
   Miként világosította fel Einstein az eltévelyedett feltalálót? A feltaláló minden lehetséges ellenvetésére feleljünk meg! Mutassunk meg, hogy a fentiekben vázolt módszeren alapuló megoldások semmilyen esetben sem működőképesek!

   (Gáspár Merse Előd)

2. A csillagoktól távol, az üres térben űrhajó halad – természetesen állandó sebességgel. Az űrhajó elejére és végére egy-egy hatalmas lencsét szereltek, ami a csillagok fényét egy-egy víztartályra fókuszálja. A Doppler-effektus miatt az űrhajó elején a „szembejövő” csillagok fénye kissé kékebb, az űrhajó farán a „távolodó” csillagok fénye kissé vörösebb az átlagosnál. Mivel Planck és Einstein szerint a fotonok energiája arányos a frekvenciájukkal, az űrhajó elején levő hőtartály azonos idő alatt több energiát nyel el a csillagok fényéből, mint hátsó párja – így a benne levő víz egy kissé melegebb lesz. A két tartály közé hőerőgépet kapcsolnak, ezzel fűtik a kapitány szaunáját, és hajtják a Nagy Számítógép hűtőventillátorát. Ez a módszer kényelmes és örök ideig tartó energiaforrásul szolgál az űrhajó utasainak.

   a) Működhet-e a rendszer? Nincs ellentmondásban létezése a termodinamika második főtételével? (Hiszen csak egyetlen hőtartályt: a csillagok sugárzását használja energiaforrásul.)

   b) Egyesek szerint az űrhajó előbb-utóbb megáll. Milyen fizikai tényekre hivatkozhatnak ezek az Egyesek? No de mit jelent az, hogy „megáll”? Mihez képest? És mit szól ehhez Einstein?

   (Dávid Gyula)

3. Egyik este az ifjú Albert a konyhaasztalnál üldögélt a kötelező napi narancsadagjával küszködve. Igazából csak játszott a narancsokkal, nem is evett. Történt ugyanis, hogy egy (tökéletesen félgömb alakú) fél narancs akadt a keze ügyébe, amit újra és újra az élére állítva egy lökéssel útnak indított az asztalon. A narancs mámorító táncában elmélyülve Albert azon morfondírozott, vajon elvileg meglökhető-e a narancs úgy, hogy egyenes, vagy körpályát kövessen.

   a) Próbáljunk mi is válaszolni a feltett kérdésekre!

   Általában persze a narancs görbe útra tévedt, és a frissen mosott narancs a konyhaasztalon lévő leheletnyi lisztrétegben szebbnél szebb ábrákat rajzolt ki. Ennek láttára Albert gyorsan befalta a narancsokat, és az este többi részét a kirajzolódott görbék matematikai elemzésével töltötte.

   b) Tegyük ezt mi is! Van-e a görbéknek valamilyen általános kvalitatív tulajdonsága, ami független a számolásokban használt csillapítás jellegétől? (*Segítség*: Feltételezzük, hogy a narancs homogén tömegeloszlású!)

   (Rakyta Péter)

4. A „Fel–feldobott kő” projekt keretében az amerikai Gun Club végre elkészítette a Verne Gyuláról elnevezett űrhajókilövő ágyút. (Igaz hogy a gigantikus földmunkák mellékhatásaként leállt a Föld forgása, és elszökött a légkör, de hát valamit valamiért: J. T. Mastonnak így kevesebb paramétert kell figyelembe vennie számításai során.) Az ágyú épp a második kozmikus sebességgel lövi ki a lövedéket, amely ezután sugárirányban távolodik a Földtől. A kilövés előtt nem sokkal szereznek csak tudomást arról, hogy egy konkurens német szervezet is megépítette az övékkel hajszálra megegyező ágyúját, tőlük tízezer kilométer távolságra. A németek ráadásul egy-egy órai időkülönbséggel egymás után három lövedék kilövését is tervezik: a „Nulla kő” az „Egy kő” és a „Két kő” nevű űrhajókat. A középső lövedék egyszerre indul a floridai „Verne” űrhajóval. Természetesen mindkét társaság felszereli űrhajóit a többi lövedék mozgását figyelő radarokkal.

   Elérkezik a kilövés napja. Az „Egy kő” (Ein Stein) űrhajóban fekvő legénység izgatottan készül a páratlan űrutazásra. Bumm!… hatalmas lökés… úgy látszik, nem voltak elég hatékonyak a lökéscsillapítók… a legénység eszméletét veszti, majd amikor másfél óra múlva magukhoz térnek, amnézia lép fel: nem tudják, kik ők, és hol vannak. Tanácstalanul lebegnek a kabinban. Egyedüli információforrásuk a radar, melynek képernyőjének közepén saját űrhajójuk látható, és a három másik fémtárgy hozzájuk viszonyított helyzetét, illetve mozgását is mutatja, továbbá az időt. Az utasoknak hamarosan eszükbe jut a legfontosabb tudnivaló: valamennyien fizikusok, tanulták a Fizikus indulót és Newton törvényeit. Lebegésükből levonják a következtetést: inerciarendszerben vannak. Ezért aztán első dolguk meghatározni a másik három test hozzájuk viszonyított gyorsulását okozó erőtörvényt. Tegyük ezt mi is!

   (Dávid Gyula)

5. Einstein a speciális relativitáselmélet megalkotása után sokat gondolkodott a kitüntetett szerepű egyenes vonalú mozgás és a gyorsuló, pl. a körmozgás közti fizikai és filozófiai különbségeken. Tegyük ezt mi is! Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt tud egy pók álló helyzetből elfutni 3,14 méterre és vissza, ha ugyancsak álló helyzetbe akar érkezni! Mennyi idő alatt tud egy 1 méter sugarú körön körbefutni úgy, hogy álló helyzetből indul és álló helyzetbe érkezik? A pók és a (vízszintes) talaj közti súrlódási együttható 0,4, a sebességére pedig nincsen korlát.

(Bihary Zsolt)

6. Einstein első, 1901-es cikkében folyadékokban végbemenő jelenségekkel foglalkozott. Tegyük ezt mi is! Bocsássunk lézersugarat (pl. lézerpointer) vízzel töltött síkfalú átlátszó edény oldalára merőlegesen! Mozgassuk a fényforrást a vízfelszín alól indulva, felfelé haladva! Írjuk le az edény mögé elhelyezett papírlapon (ernyőn) megfigyelhető jelenséget! Hogyan változik meg a kép, ha az edénybe más folyadékot töltünk?

(Rajkovits Zsuzsanna és Kenesei Péter)

7. Einstein első tudományos munkái a folyadékok felületi feszültségével foglalkoztak. Tegyük ezt mi is! Köztudott, hogy ha a vízfelszín egy részén pozitív kiemelkedést vagy negatív horpadást hozunk létre, mindkét esetben – hosszú idő után – általában pozitív (azaz kidomborodó) szolitonhullám lesz az eredmény. Trükkös módon mégis lehet horpadás alakú haladó szolitont készíteni. Mi ennek a feltétele (pl. a víz/levegő, a sósvíz/édesvíz határfelületre, illetve a víz mélységére vonatkozóan)?

(Jánosi Imre)

8. Az anekdoták szerint Einstein már gyerekkorában elmélyülten játszott a mágnesekkel. Tegyük ezt mi is! Helyezzünk két párhuzamos állású permanens mágnest méretükhöz képest nagy távolságra egy egyenes két pontjába! Kezdetben a mágnesek legyenek nyugalomban! Vizsgáljuk meg mozgásukat! Hogyan határozhatnánk meg távolság- és időmérés alapján a mágnesek erősségét? A súrlódástól, közegellenállástól és egyéb fékező erőktől tekintsünk el! Tanulmányozzuk a megoldást az általános esetben is, amikor a mágnesek tengelye sem egymással, sem az őket összekötő egyenessel nem párhuzamos!

(Cserti József és Dávid Gyula)

9. Einstein óta tudjuk, hogy elegendően erős gravitációs térben a fény is körpályára kényszerül. De a fény pályáját nem csak a gravitáció, hanem a Fermat-elv is bekanyaríthatja. Tekintsünk tehát egy optikai közeget, melynek n törésmutatója csak az origótól mért r távolságtól függ. Milyen legyen legyen ez a függvény, ha a fény ellipszis pályán kering a centrum körül: a) a centrum az ellipszis középpontja; b) a centrum az ellipszis fókusza? Legfeljebb mekkora lehet az ellipszishez képest az adott $n(r)$ törésmutató-függvénnyel jellemezhető tartomány? *Útmutatás*: Megfelelő (ciklikus) koordináta-választással könnyen megtalálhatjuk a pályát leíró differenciálegyenlet első integrálját.

(Dávid Gyula)

10. Mutassuk meg, hogy a klasszikus elektrodinamika nemrelativisztikusan nem kovariáns!

Útmutatás: Először állapítsuk meg az elektromos térerősség és a mágneses indukció Galilei-transzformációra való transzformálódási szabályát a Lorentz-erőtörvény kovarianciáját feltételezve! Ellenőrizzük, hogy ekkor az $\mathbf{E}$-t és $\mathbf{B}$-t tartalmazó Maxwell-egyenletek kovariánsak a Galilei-transzformációra! Majd pedig lássuk be, hogy a $\mathbf{D}$ elektromos eltolásvektort és a $\mathbf{H}$ mágneses térerősséget tartalmazó Maxwell-egyenletek nem lehetnek kovariánsak, ha feltételezzük a $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ és a $\mathbf{H} = (1/\mu)\,\mathbf{B}$ anyagi egyenletek kovarianciáját!

Ezek alapján vázoljuk fel, hogyan keresnénk a Galilei-transzformáció helyett olyan transzformációt, amelyre a klasszikus elektrodinamika kovariáns lesz! Hogyan hozhatta ki Poincaré a Lorentz-transzformációt?

(volt Ortvay feladat, kitűző: Fülöp Tamás, 1993/16.)

11. Mint tudjuk, Einstein sokat foglalkozott a mozgó tükrökkel. Meg nem erősített források szerint egyszer a bakterház mellett állva megbámult egy hölgyet, aki a vonaton ülve, kis kézitükrét használva szépítkezett. Tegyük ezt mi is! Tekintsünk tehát egy parabolatükröt, amely a megfigyelőhöz képest $\mathbf{v}$ sebességgel mozog! Helyezzünk a tükörtől $\mathbf{r}$ távolságra egy hozzá képest nyugvó tárgyat! Vizsgáljuk meg a tükör képalkotását, kövessük az egyes fénysugarak útját, és számítsuk ki a keletkező kép helyét, méretét és állását — mindezt természetesen végig a bakterház előtt álló Einstein koordináta-rendszerében maradva!

(Cserti József és Dávid Gyula)

12. Köztudott, hogy az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ pontban elhelyezkedő egységnyi ponttöltés elektrosztatikus potenciálja $\phi(\boldsymbol{x}) = 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$, amelyre fennáll a

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,. \tag{1}$$

téregyenlet. Más szavakkal, a $\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ töltéseloszlás majdnem mindenütt nulla, és az $\boldsymbol{x}_0$ pontra koncentrálódik úgy, hogy az $\int d^3x\,\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})$ teljes töltés egységnyi.

Ahhoz, hogy ez a képlet valóban az $\mathbb{R}^3$ tér egy pontjában elhelyezkedő töltést írjon le, az $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vektor komponenseit természetesen *valós* számoknak kell választanunk. Azonban az is igaz, hogy a háromdimenziós Laplace-operátort egy tetszőleges $\boldsymbol{x}_0$ *komplex* vektorral felírt

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \tag{2}$$

komplex értékű függvényre alkalmazva is majdnem mindenütt nullát kapunk (próbáljuk ki!). A formulában $\boldsymbol{x}$ továbbra is valós vektor, csak $\boldsymbol{x}_0$ vehet fel komplex értékeket. A négyzetgyök előjelének választása tetszőleges, de egyszer s mindenkorra rögzíteni kell.

A (2) formulával leírt komplex értékű elektrosztatikus potenciál természetesen fizikailag értelmetlen (miért?). Valóssá és fizikaivá tehetjük azonban a következő módon:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\bar{x}_0)^2 + (y-\bar{y}_0)^2 + (z-\bar{z}_0)^2}}\,, \tag{3}$$

ahol a felülvonás komplex konjugálást jelent. Ez a függvény nyilvánvalóan valós, és rá a Laplace-operátort alkalmazva, tetszőleges komplex háromdimenziós $\boldsymbol{x}_0$ vektor esetén majdnem mindenütt zérust kapunk. Ezért a (3) képlet alkalmas egy fizikai töltéseloszlás leírására, melynek sűrűségét a

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\,\rho(\boldsymbol{x})\,, \tag{4}$$

egyenlet definiálja. Milyen lehet a $\rho(\boldsymbol{x})$ töltéssűrűség-eloszás? Mennyi a teljes töltés? Mi a töltéseloszlás tartója, azaz mely pontokban található töltés? Hogyan lehet válaszunkat összeegyeztetni a természetesen kínálkozó „komplex pontokban elhelyezkedő két ponttöltés”, vagy a „komplex dipólus” magyarázatokkal?

Oldjuk meg a feladatot először az $\boldsymbol{x}_0 = (i, 0, 0)$ választással! Aztán gondoljuk végig, mi történik, ha a vektor első komponense nem tisztán képzetes, hanem valós része is van! Mi a helyzet, ha mindhárom komponens tetszőleges komplex szám?

Hová lett az $\mathbb{R}^3$ tér $SO(3)$ szimmetriája? Az $SO(3)$ csoportbeli transzformációkat alkalmazva egy valós háromdimenziós vektor mindig beforgatható egy megadott tengely irányába. Milyen hasonló állítást tehetünk a komplex háromdimenziós vektorokról, ha megengedjük az $SO(3)$ transzformációk használatát? A valós $(\pm x_0, 0, 0)$ pontokban elhelyezkedő két ponttöltés invariáns marad az x tengely körüli forgatások $SO(2)$ részcsoportjára nézve. Mi lehet a (4) formula által definiált $\rho(\boldsymbol{x})$ töltéseloszlás stabilizáló részcsoportja?

A fentiekben az $SO(3)$ csoporton a szokásos valós forgáscsoportot értettük. Hogyan változnak válaszaink, ha e csoportot az $SO(3,\mathbb{C})$-re, azaz a komplex 3×3-as A mátrixok csoportjára cseréljük, melyekre $AA^T = 1$? (A T jel a mátrix transzponáltját jelöli.) Melyik lesz feladatunk „igazi” szimmetriacsoportja, $SO(3)$ vagy $SO(3,\mathbb{C})$?

És végül: mi köze ennek a feladatnak Einsteinhez? *Tanács:* gondoljunk az $SO(3,\mathbb{C})$ csoport és az $SO(3,1)$ Lorentz-csoport viszonyára!

(Nógrádi Dániel)

13. Einstein híres 1905-ös cikkében a „Mozgó testek elektrodinamikájáról” írt. Tegyük ezt mi is! Ez a cím azonban foglalt, foglalkozzunk tehát a „Forgó testek elektrodinamikájával”! Transzformáljuk át a (nemrelativisztikus) Maxwell-egyenleteket egy $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszerbe (*tanács*: használjunk racionalizált CGS egységrendszert)! Írjuk az egyenleteket vektoros alakba!

Milyen alakú lesz a töltésmegmaradást leíró kontinuitási egyenlet? Hogy néz ki az m tömegű, q töltésű pontrészecske mozgásegyenlete? Hogy lehet bevezetni a szokásos vektor- és skalárpotenciálokat? Milyen alakú hullámegyenleteket elégítenek ki a térmennyiségek, illetve a potenciálok? Írjuk fel a töltés- és árammentes tartományokban terjedő elektromágneses hullámok diszperziós relációját!

Vizsgáljuk meg, van-e a forgó koordináta-rendszerben felírt egyenleteknek egymáshoz képest R távolságban nyugvó, M és m tömegű, $+e$ és $-e$ töltésű részecskéket leíró megoldásuk! Ha nincs, milyen matematikai közelítéseket, elhanyagolásokat kell tennünk, hogy legyen ilyen megoldás? Mi ezen közelítések fizikai jelentése? Mekkorára kell választanunk a forgás Ω szögsebességét?

(Dávid Gyula)

14. Einstein gyakran tépte fényképeiről közismert ősz haját, amikor az újságokban saját elméleteinek furcsa, vulgarizált változataival találkozott. Tegyük ezt mi is! Aztán pillantsunk magunk elé! Egy L hosszúságú hajszál úszik egy T hőmérsékletű hőfürdőkád vizének felszínén. A hajszál nyújthatatlan, de a víz felszínén tetszőlegesen görbülhet (akár át is metszheti magát), vonalmenti energiasűrűsége a görbületének négyzetével arányos. A hajszál két végpontjában lévő érintők által bezárt szöget jelöljük φ-vel! Mi lesz a φ szög valószínűségi eloszlása?

(Egri Győző és Tóth Bálint)

15. Einstein a Brown-mozgás elméletének megalkotásával mikroszkópikusan megalapozta a diffúzió Fourier-féle egyenletét, amely szerint a $n(\mathbf{r}, t)$ koncentráció időderiváltja arányos Δn-nel, ahol $\Delta = \nabla^2$ a Laplace-operátor. De biztos, hogy jó ez az egyenlet? Nézzünk egy fémlemezt, amelyben egy oldott adalékanyag koncentrációja az egyik felülettől a másikig lineárisan változik! A linearitás miatt $\Delta n = 0$. Akkor hát az ilyen inhomogenitás örök időkre megmarad a lemezben?

(Geszti Tamás)

16. Egy lakótelep utcái végtelen négyzetrácsot alkotnak. Einstein óta tudjuk, hogy egy ilyen rendszerben a részeg ember Brown-mozgást végez. A részeg ember jellemzője, hogy a kereszteződésekben mindig egyenletes eloszlással „választ" a rendelkezésre álló elágazasok közül. (A részeg fizikus feladata mögött a bolyongó elemi részecske fizikai modellje áll. Neki pedig nincs emlékezete. Így visszafelé is ugyanolyan valószínűséggel indul, mint a másik három irányba. A részeg fizikus tiszteli a természetet, tehát ő is így tesz: a *négy* lehetséges irány közül választ egyenletesen.)

a) Tegyük fel, hogy két egymással szomszédos kereszteződés közti utcaszakasz le van zárva. Legyen a kocsma a lezárt utcaszakasz egyik végén! Mi a valószínűsége annak, hogy a kocsmából kilépő részeg fizikus, aki a lezárt utcaszakasz másik végén lakik, hazatalál, mielőtt még újra a kocsma elé tévedne?

b) Hogyan változik ez a valószínűség, ha a részeg fizikusunk italtól mámorosan autóba ül? „Algoritmusa" ugyanaz, mint korábban, de tudatalattija betartatja vele a közlekedési szabályokat. Most nincsen lezárt utca. A lakótelep minden utcája kétirányú. Viszont az autó kormánya be van ragadva, és ezért mindig csak egyenesen haladhat, vagy balra tud fordulni. (Kezdetben bármerre indulhat.)

(Gáspár Merse Előd)

17. Két tachion mozog a megfigyelőhöz képest $2c$ sebességgel. Adjuk meg relatív sebességük nagyságát és irányát, ha mozgásuk (a megfigyelő koordináta-rendszerében)

a) párhuzamos és ellenkező irányú,

b) egymásra merőleges!

(volt Ortvay feladat, kitűző: Dávid Gyula, 1992/16.)

18. Az Einstein Galaktikus Űrállomás 2315-ös pályáraállítása óta egy 100 fényév átmérőjű, a Naprendszert érintő körpályán kering egyenletes sebességgel. A legénység a Bioadaptációs Hivatal által jóváhagyott $2g = 20\ \mathrm{m/s^2} = 2\ \text{fényév/év}^2$ tehetetlenségi (centrifugális) gyorsulást érzékel.

Mely években suhan el az űrállomás a Naprendszer mellett? Mennyit öregszik a legénység egy ciklus során?

Az űrállomást proton-antiproton fotonrakéták (PAPR) tartják körpályán. (A PAPR rakéták elszigetelten tárolt proton- és anti-proton plazmák annihilációjával nyert, kollimált fotonok sugárhajtásán alapuló, gyakorlatilag veszteségmentes hajtóművek a késő 23. századból.) A felhasználandó üzemanyagot minden ciklusban egy állandó 200 g gyorsulással, közelítőleg egyenes pályán mozgó (természetesen szintén PAPR rakéták által hajtott) robotűrhajóval lövik az űrállomásra. A robotűrhajó üzemanyagon kívüli, haszontalan tömege elhanyagolható.

Mennyi üzemanyagot kell az űrállomásra juttatni egy ciklusban, ha az űrállomás hasznos tömege 10000 tonna? Mennyi üzemanyaggal kell a robotűrhajót a Földről elindítani, és hogyan kell időzíteni indítását az űrállomás érkezéséhez képest?

(Bihary Zsolt)

19. Egy lézert egyenletesen gyorsítunk a tengelyével párhuzamosan. Hogyan módosul a fénye egy ugyanolyan, de nyugvó lézeréhez képest? (Figyelem: a fénynek a színén kívül egyéb tulajdonságai is vannak!) A lézert modellezük rúd alakú szilárdtesttel, egy-egy tükörrel a végein. Függ(het)-e valami attól, hogy a lézert felületi vagy térfogati erő gyorsítja? És ha gravitációs?

(Fehér Titusz)

20. Einsteint – saját bevallása szerint – az indította a későbbi relativitáselmélet problémáival való foglalkozásra, hogy gyermekkorában sokszor elképzelte, mit látna, ha versenyt futna a fénnyel, és utol is érné. Talán mellette haladó, illetve álló fényhullámokat? Azóta – épp Einsteinnek köszönhetően – tudjuk, hogy ez vákuumban nem történhet meg: a c sebességgel mozgó fényt nem lehet utolérni. Mi a helyzet azonban a közegben haladó, $u = c/n$ sebességgel mozgó fénnyel (ahol n a törésmutató)? Cserenkov elektronjai köztudomásúlag lehagyják a vízben haladó fényt. Tegyük ezt mi is!

Írjuk fel tehát a megfigyelőhöz képest $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó, végtelen kiterjedésű, ϵ dielektromos állandójú és μ mágneses permeabilitású közegben érvényes Maxwell-egyenleteket (töltés és áramok sehol sincsenek)! Keressük az egyenletek $\mathbf{k}$ hullámvektorú és ω frekvenciájú síkhullám-megoldásait! Írjuk fel a hullámok $\omega(\mathbf{k}, \mathbf{V})$ diszperziós relációját! Keressük meg az *„abszolút állóhullámokat"*, azaz az $\omega = 0$ frekvenciájú hullámmegoldásokat! Vizsgáljuk meg e hullámok lehetséges polarizációs viszonyait, a $\mathbf{V}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{H}$ vektorok lehetséges elrendeződéseit! Diszkutáljuk eredményeinket a közegbeli u fénysebesség és a közeg megfigyelőhöz képesti V sebességének különböző értékeire! Hogyan észlelhetők az „abszolút állóhullámok"? Mit „látna" Einstein egy ilyen hullám mellett szaladva (illetve állva)? (*Javaslat:* használjunk racionalizált CGS egységrendszert!)

(Dávid Gyula)

21. A müonok elektron–neutrinó–antineutrinó hármasba bomlanak el. Hogyan függ a keletkező részecskék impulzuseloszlása a beérkező polarizálatlan müon p_0 impulzusától? Tudjuk, hogy a részecskefizika Standard Modellje leírja a müon bomlását: a polarizálatlan müon izotróp bomlása során keletkező (kb. nulla tömegű) elektron impulzuseloszlása $f(x) = 16x^2(3 - 4x)$, ahol $x = p_{\text{elektron}}/m_{\text{ müon}}$, és $0 < x < 0{,}5$ lehet csak.

   Vizsgáljuk meg a kérdés következő általánosítását is! Az eredeti részecske impulzusa p_0, tömege m_0, a bomlás során keletkező részecske impulzusának nagysága p, tömege m (mely most nem tekinthető zérusnak). Ismerjük a tömegközépponti rendszerben a kilépő részecske $f(p_{\text{TKP}}, \theta)$ nem feltétlenül izotróp eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a kirepülő részecske $f(p, \theta)$ eloszlásfüggvényét a laboratóriumi rendszerben!

(Katz Sándor)

22. Vizsgáljuk meg a táguló fotongáz három különböző esetében fellépő termodinamikai változások közti hasonlóságokat és különbségeket!

   a) Dobozba zárt fotongáz: Ha egy tükröző falú tartályba elektromágneses sugárzást zárunk, és a tartály falait lassan elmozdítva növeljük a térfogatot, a mozgó falon visszaverődő elektromágneses hullámok Doppler-eltolódást szenvednek, és így a spektrum lassan megváltozik. Ha a sugárzás eredetileg Planck-eloszlást követett, akkor a megváltozott spektrum egy más hőmérsékletű Planck-görbének felel meg. Így írhatjuk le a dobozba zárt fotongáz adiabatikus tágulását. Vizsgáljuk meg a folyamat részleteit, és határozzuk meg a fotongáz térfogata és hőmérséklete közötti összefüggést!

   b) Az űrben szabadon terjedő fotongáz: Példa erre a Nap fotoszférájának kb. 6000 K hőmérsékletű anyagával egyensúlyban levő elektromágneses sugárzás, amely a Nap felszínét elhagyva eredeti térfogatát jelentősen megnöveli. Mekkora lesz a sugárzás hőmérséklete, mire a Földre ér? Mekkora lenne a Föld átlaghőmérséklete, ha nem lenne légköre (a légkör üvegházhatása tovább bonyolítja a képet)?

   c) Kozmikus háttérsugárzás: A kozmológia szerint a táguló világegyetemben is hasonló folyamat megy végbe: a hajdani ősrobbanás visszfényeként fennmaradt, eredetileg a többi anyagfajtával termikus egyensúlyban volt fotongáz termikus lecsatolódása óta állandóan tágul és hűl. A folyamat első pillantásra a b) alattihoz hasonlít. A kozmológusok azonban azt állítják, hogy a sugárzás spektruma minden pillanatban a Planck-görbét követi, monoton csökkenő hőmérséklettel, és a fotongáz adiabatikus tágulásáról beszélnek, akárcsak az a) példában. Ebben az esetben azonban semmiféle visszaverődési folyamat nem magyarázza az egyes hullámok Doppler-eltolódását. Hogyan lehetséges tehát az, hogy a fotongáz mindig jól meghatározott hőmérséklettel jellemezhető állapotokon át folytatja adiabatikus tágulását? Milyen anyaggal van termikus egyensúlyban a sugárzás?

   Sherlock Holmes jó tanítványaként keressünk valami szimmetriát a jelenség hátterében! Mi lenne a helyzet, ha a fotonnak véges – nem nulla – nyugalmi tömege lenne?

(volt Ortvay feladat, kitűző: Dávid Gyula és Hantz Péter, 1996/26.)

23. Az einsteini speciális relativitáselméletben a világegyetem alapja egy homogén, 4 dimenziós, lokálisan mindenhol Minkowski metrikájú téridő, amely azonban többféle globális topológiával is összefér. Képzeljünk el egy olyan téridőt, amelynek egyik térkoordinátája ciklikus, azaz a világnak henger-topológiája van ($S^1 \times R^3$)! Vizsgáljuk meg ebben a világban az ikerparadoxont!

   Legyen a két ikertestvér A és B! Az A iker a pályaudvaron ácsorog, amikor B a szupergyors közlekedést biztosító, „világ körüli” útvonalon járó Relativisztikus Vonattal elrobog mellette. A Relativisztikus Vonat nagy sebessegű, egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A találkozás pillanatában A és B egyidős.

   a) Az utazás során B folyamatosan figyeli a pályaudvar mellett látható hatalmas toronyóra által mutatott időt, és összehasonlítja a saját karóráján látható idővel. Mit tapasztal B, gyorsabban vagy lassabban jár a pályaudvari óra? Mitől függ a válasz?

   b) Melyik iker lesz idősebb, amikor újra találkoznak a pályaudvaron? Mi a szimmetria, illetve aszimmetria oka?

   c) Tegyük fel, hogy a Relativisztikus Vonat sohasem áll meg a pályaudvaron, hanem változatlan sebességgel halad tovább! Hogyan változik a motor hangjának A és B által hallott erőssége a frekvencia és az idő függvényében?

   (Tegyük fel, hogy a vasúti pálya hossza $L = 1$ fényév, a szerelvény sebessége $v = 0{,}99\,c$, és a mozdony $f = 1000$ Hz frekvenciájú, állandó I intenzitású hangot bocsát ki a vele együtt haladó rendszerben. A hangsebesség $10^{-6}c$. Az A iker 3 méterre áll a sínektől. Az ikrek szeme és füle tökéletes.)

(Haiman Zoltán és Kocsis Bence)

24. A speciális relativitáselmélet szerint egy mozgó űrhajóban lassabban múlik az idő. Az általános relativitáselmélet szerint viszont a gravitációs tér lassítja az idő múlását, tehát a Föld gravitációs kútjából kiemelkedő rakétában az órák gyorsabban járnak. A Richard Feynmanról elnevezett lopakodó űrhajó azt a feladatot kapta, hogy földi bázisáról sugárirányban felszállva földi idő szerint pontosan egy nap múlva térjen vissza ugyanoda úgy, hogy az űrhajó órái a fizikailag lehetséges legtöbb eltelt időt mutassák. Hogyan kell a kapitánynak működtetnie a hajtóműveket, ha teljesíteni akarja a feladatot?

   (A rakéta végig sugárirányban mozog, a Föld keringésétől és a légkör zavaró hatásától tekintsünk el.)

(volt Ortvay feladat, kitűző: Gnädig Péter, 1996)

25. Frederick Pohl „Átjáró” c. sci-fijének hőse barátnőjét véletlenül egy fekete lyukba lökte. Emiatt egész életében gyötri a lelkifurdalás, hiszen tudja, hogy a fekete lyuk közelében az idő lelassul, és a hölgy méltatlankodó arckifejezése az idők végezetéig látható lesz. A második kötetben a főhős meggazdagodik, új terveket sző, és a hamarosan megjelenő harmadik kötetben valószínűleg a nő után ered. Ráér, hiszen az eltelt tíz év alatt a hölgy számára csak fél óra telt el. Siessen-e a kiadó a könyv megjelentetésével, vagy valóban rendelkezésére áll hősünknek az egész örökkévalóság?

    Utóirat: A feladat eredeti kitűzése óta megjelent a harmadik kötet. Ebben az Idegenek egy „gravitációs konzervnyitó” segítségével kihúzták a hölgyet a fekete lyukból. Ez az örvendetes tény természetesen mit sem változtat a 13 éve kitűzött feladat fizikai tartalmán.

(volt Ortvay feladat, kitűző: Dávid Gyula, 1992/20.)

26. „Einstein margarétája”: Az általános relativitáselmélet szerint a bolygók ellipszis alakú pályája nem záródik tökéletesen. Extrém nagy tömegarányú bináris rendszerek (pl. egy nagy fekete lyuk körül keringő neutroncsillag) esetén azonban megfelelő kezdeti feltételek mellett mégis csak kialakulhat zárt pálya.

    Hogyan kell megválasztanunk a kezdeti feltételeket ahhoz, hogy a neutroncsillag pályája elég nagy, de nem túl hosszú idő alatt egy margaréta virág szirmaihoz hasonló ábrát rajzoljon ki? Milyenek a rendszer által kibocsátott gravitációs hullámok?

(Márka Szabolcs)

27. „Einstein ágyúja”: Tegyük fel, hogy egy neutroncsillag tömegének kicsiny (kb. 10^{-11}) része $c/2$ sebességgel, aszimmetrikusan kilövell az űrbe! Határozzuk meg a tömeg kvadrupól-momentumának időbeli fejlődését! Van-e gravitációs sugárzás, és ha igen, akkor mennyi a kibocsátott gravitációs hullámok intenzitása?

(Márka Szabolcs)

28. Nemrégiben két, jelenleg a Naptól kb. 20 csillagászati egység távolságban különböző irányban távolodó űrszonda rádiójeleiben lassan növekvő kékeltolódást észleltek, amely (az adatokat több évre visszamenőleg elemezve) konstans, a Nap felé mutató, ismeretlen eredetű gyorsulásnak felel meg, melynek értéke kb. $10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$. Néhány kutató felvetette, hogy a jelenséget a világegyetem tágulása okozza, mivel a Hubble paramétert a fénysebességgel szorozva kb. ezt az értéket kapjuk. Igazoljuk vagy cáfoljuk pontos számítással ezt az elméletet!

(Bene Gyula)

29. Tegyük fel, hogy a mi ismert világunkon kívül létezik egy teljesen hasonló másik világ, a Túlvilág. A két világot összeköti egy féreglyuk, ezen keresztül a bátor űrhajósok elvi akadály nélkül, élve, sértetlenül átjuthatnak a Túlvilágra. Erre lehet egy esetleges megoldás a következő téridő.

    A koordináták legyenek (t, l, θ, ϕ), ahol $l > 0$ a mi ismert világunkban, és $l < 0$ a világ túloldalán, továbbá $0 \leq \theta \leq \pi$ és $0 \leq \phi < 2\pi$ a szokásos gömbi szögek. Az ívelem legyen

$$ds^2 = e^{2\Phi(l)}dt^2 + dl^2 + r(l)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

    ahol $\Phi(l) = -2M/|l|$ és $r = |l| - M\ln(|l|/r_0)$. Itt $M > 0$ a féreglyuk tömege és $r_0 > 0$ a torkának „sugara”. Ez a téridő $|l| \to \infty$ esetén valóban aszimptotikusan Minkowski-féle.

    a) Mekkora legyen M és r_0, hogy a féreglyukba lassan radiálisan leereszkedő megfigyelő legfeljebb a földi g gyorsulást érezze?

    b) Mekkora legyen M és r_0, hogy egy 180 cm magas, óvatos, ezért lassan leereszkedő megfigyelőre feje és lába között legfeljebb $1g$-nyi árapályerő hasson?

    c) Mekkora legyen M és r_0, hogy egy 180 cm magas, rettenthetetlen, ezért a féreglyukba radiálisan fejest ugró megfigyelőre feje és lába között legfeljebb $1g$-nyi árapályerő hasson?

(Kocsis Bence)

30. Vizsgáljuk a 29. feladatban szereplő féreglyukat fenntartó anyag természetét!

    a) Írjuk fel az Einstein egyenletek $t - t$ és $r - r$ komponensét, majd állapítsuk meg a sűrűséget és a nyomást a hely függvényében!

    b) Mekkora sűrűséget és nyomást észlel egy radiális irányban, közel fénysebességgel mozgó megfigyelő? Miért érdekes ez?

(Kocsis Bence)

31. Az Einstein-egyenleteknek két egyszerű közismert gömbszimmetrikus megoldása az M tömegű fekete lyuk Schwarzschild-térideje , illetve a Einstein-féle Λ kozmológiai konstanst tartalmazó anti-de Sitter téridő. Ezek a megoldások azonban egymást kizáró esetekben adódnak: a Schwarzschild-féle fekete lyuk megoldás nem feltételez kozmológiai állandót, a kozmológiai megoldás viszont nem feltételez centrális szingularitást.

a) Vezessük le általános statikus gömbszimmetrikus „vákuum-megoldást”, ahol mind $M \neq 0$, mind $\Lambda \neq 0$.

b) Hogyan változik a fekete lyuk eseményhorizontjának Schwarzschild-sugara a standard megoldáshoz képest? Numerikusan ellenőrizzük, hogy a mai univerzumban megfigyelhető nagyságú kozmológiai állandó csak elhanyagolható mértékben változtatja a naptömegű fekete lyukak sugarát! Mekkorának kell lennie a fekete lyuknak, hogy ez ne így legyen?

c) Tegyük fel, hogy a Nagy Bumm után nem sokkal bekövetkező inflációs korszak során is léteztek fekete lyukak! Hogyan módosul a b) kérdésre adott válasz e korai fekete lyukak esetén?

(Kocsis Bence)

32. Woody Allen az Annie Hall című filmben azon kesereg, hogy Einstein szerint a Világegyetem tágul, ezért lehet, hogy Brooklyn is, sőt ő maga is tágul. A kozmológusok azzal szokták megnyugtatni Woodyt, hogy a kozmikus tágulás csak az „elegendően nagy” objektumokra vonatkozik, a kicsiny, lokális kölcsönhatások által összetartott rendszerekre (atom, Woody, Brooklyn, Föld, Naprendszer, Tejútrendszer stb.) már nem. De vajon valóban igaz ez? Mit jelent ebben a kontextusban az „elegendően nagy”? Vizsgáljuk meg a kérdést egy egyszerű klasszikus mechanikai modell keretében!

A táguló Univerzum modelljeiben definiálni szokták az „együttmozgó” kozmológiai koordináta-rendszert, amelyben a „nyugvó” objektumok (pl. galaxisok) $\mathbf{R}$ helyvektora időben állandó. A fizikai $\mathbf{r}(t)$ távolságvektorok (a homogenitás miatt tetszőleges origótól számítva) ezzel a következő kapcsolatban vannak: $\mathbf{r}(t) = a(t)\,\mathbf{R}$, ahol $a(t)$ a kozmológiai tágulást leíró, általában monoton növekvő függvény. Az origótól $\mathbf{r}(t)$ fizikai távolságra levő test gyorsulása tehát $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{a}(t)\,\mathbf{R} = (\ddot{a}/a)\,\mathbf{r}(t)$. A fentiek úgy is interpretálhatók, mintha az origótól $r(t)$ távolságban levő m tömegű testre a szokásos lokális erőkön felül egy $\mathbf{F}_{\mathrm{cosm}} = m(\ddot{a}/a)\,\mathbf{r}$ „kozmológiai erő” is hatna.

a) Vizsgáljuk meg egy m tömegű test newtoni keringését az origóban levő, nála sokkal nagyobb M tömegű test gravitációs terében a fenti kozmológiai eredetű erő figyelembevételével! Szeparáljuk a mozgásegyenleteket a szokásos síkbeli polárkoordinátákban, és írjuk fel az $r(t)$ radiális fizikai koordinátára, illetve az $R(t) = r(t)/a(t)$ „radiális kozmológiai koordinátára” vonatkozó differenciálegyenletet!

b) A legfrissebb mérések szerint az Univerzum gyorsulva tágul, tehát az $a(t)$ tágulási függvény $Ce^{\alpha t}$ alakú. Helyezzük a fenti egybolygós naprendszer csillagát a koordináta-rendszer origójába, és vizsgáljuk meg a bolygó viselkedését az exponenciálisan táguló kozmosz hátterében! Diszkutáljuk a megoldásokat az α tágulási paraméter, a csillag M tömege és más szükséges paraméterek függvényében! Mi lesz a bolygó sorsa, ha $t \to \infty$? (Figyelem! A feladat e részében NEM numerikus megoldást, hanem analitikus vizsgálatokat várunk!)

c) Vizsgáljuk meg numerikusan a kezdetben r_0 sugarú körpályán mozgó bolygó pályasugarának változását az idő függvényében más tágulási függvények esetében is (pl. $a(t) \sim t^{2/3}$, t^2 vagy $1 + t^2\,\mathrm{th}\,kt$)! Mit mondhatunk a bolygó sorsáról, és mivel nyugtathatjuk meg Woody Allent?

(R. H. P. nyomán Dávid Gyula)

33. A világűrből időnként óriási energiájú részecskék érkeznek a Földre. Eddig 14 olyan részecskét (nagy valószínűséggel protont) detektáltak, melynek energiája 10^{20} eV fölött volt. A rekorder a Fly's Eye nevű detektor által látott $\approx 3 \times 10^{20}$ eV energiájú részecske.

Ezen részecskék keletkezésének egy lehetséges modellje a következő: Az ősrobbanás elmélete a háttérsugárzáshoz hasonlóan megjósolja egy neutrinó-háttér létezését is (kb. 56 neutrinó cm^3-enként). Ezek lényegében nyugalomban lévő neutrinók. A nagy energiájú protonokon kívül feltételezhetően nagy energiájú neutrinók is nagy számban érkeznek a Földre. Ezen nagy energiájú neutrinók az álló neutrinókkal ütközve Z bozonokat tudnak kelteni (ha energiájuk és az álló neutrinó tömege elég nagy), majd ezek a Z-k többek között protonokra bomlanak. Ezek a protonok (és anti-protonok) lehetnek a detektált nagyenergiás kozmikus részecskék. Tegyük fel, hogy a keltett Z részecske bomlásakor keletkező proton a Z bozon energiájának kb. 1/100-át viszi el (a Z nyugalmi rendszerében). Határozzuk meg a neutrinó tömegét, ha a legnagyobb energiájú ($\approx 3 \times 10^{20}$ eV) detektált proton ilyen módon keletkezett (és a proton a bejövő nagy energiájú neutrinóval azonos irányban repült ki)! Hogyan változik az eredmény, ha figyelembe vesszük a protonok szögeloszlását: $p \propto 1 + \cos^2\theta$, ahol θ a kirepülő proton és a bejövő neutrinó mozgásiránya által bezárt szög a Z nyugalmi rendszerében?

A neutrinótömeg ilyen meghatározása azon alapul, hogy a Z-keltéshez szükséges nagy energiájú neutrinók energiája a neutrinó tömegétől függ. Ezen felbuzdulva Lee ben Canal az alábbi kísérlet ötletével áll elő: Ütköztessünk egymással két neutrinónyalábot! Az egyik nyaláb energiáját tartsuk fixen (kb. a Z tömeg környékén), majd a másik nyaláb energiáját hangoljuk úgy, hogy az ütközés során Z bozonok keltődjenek! Ezek után az előbbi példa mintájára a neutrinótömeg a két nyaláb energiájából kiszámítható. Javasoljuk-e a kísérlet tényleges megvalósítását (feltéve hogy a technikai feltételek adottak a Z energiájához közeli, elegendően nagy luminozitású nyalábok létrehozásához)?

(volt Ortvay feladat, kitűző: Katz Sándor, 2001)

34. Tekintsük a pordominált, táguló, sík Friedmann-Robertson-Walker univerzum következő módosítását, és mutassuk meg, hogy az Einstein-egyenletek egzakt megoldása! A térben homogén anyagból távolítsunk el képzeletben egymást nem metsző, különböző sugarú gömböket, és helyettesítsük őket a középpontjukba helyezett egy-egy tömegponttal! A tömegpont tömege az eltávolított anyag tömegével egyenlő. A gömbök belsejében a téridő metrikája a Schwarzschild-metrika. Hogyan terjed a fény egy ilyen univerzumban?

(Bene Gyula)

35. Einstein azért kapta a Nobel-díjat, mert a fotoelektromos emisszió Lénárd-féle törvényének értelmezésével bebizonyította a fotonok létezését. Einstein ezzel nem volt elégedett, és tovább kereste a fotonok létének meggyőzőbb bizonyítékát, amíg meg nem találta azt a spontán és indukált emisszió törvényszerűségeiben. De mi volt a baj az első, Nobel-díjas bizonyítással? Értelmezhető a kísérletben megfigyelt viselkedés a kvantummechanika ismeretében fotonok nélkül is?

(Geszti Tamás)

36. A modern Bose-Einstein kondenzációs kísérletekben atomokat (amelyek bozonok) optikai vagy mágneses úton létrehozott

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\, m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

potenciálban csapdáznak, ahol ω_x, ω_y és ω_z az ún. „csapdafrekvencia”, m pedig egy atom tömege. Vegyünk N nemkölcsönható atomot, amelyet ebbe a potenciálba helyezünk! Mekkora a Bose-Einstein kondenzáció T_c kritikus hőmérséklete? Hogyan változik a kondenzátumot alkotó atomok száma $T < T_c$ hőmérsékleteken? Becsüljük meg a kritikus T_c hőmérsékletet ^{23}Na izotópokat véve, ha $N \approx 10^9$, és a tipikus csapdafrekvencia $\omega/(2\pi) \approx 200$ Hz!

(Csordás András)

37. Tudjuk, hogy a spin–pálya kölcsönhatás tipikus relativisztikus effektus. Tekintsünk egy az x-y síkban fekvő, infinitezimálisan vékony, a sugarú körgyűrűben mozgó elektront, melyet a

$$H = \frac{L_z^2}{2ma^2} + \frac{\beta}{a}(\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{S})L_z + i\frac{\hbar\beta}{2a}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S})$$

Hamilton-operátorral írunk le! Itt $\mathbf{S}$ az elektronspin operátora, L_z a pályamomentum z komponensének operátora, $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_\varphi$ a síkbeli polárkoordináta-rendszer radiális és azimutális irányú egységvektorai, β pedig egy valós paraméter. Kapcsoljunk a rendszerre homogén, a gyűrű síkjára merőleges, B indukciójú mágneses teret! Határozzuk meg az így kapott rendszer energia-sajátértékeit és energia-sajátállapotait, valamint az egyes sajátállapotok áramát!

(Pályi András)

38. A relativisztikus kvantummechanika tankönyveiben gyakran olvashatunk ilyesmiket: „a Dirac-operátor pontosan akkor cserélhető fel az impulzusmomentum-komponensek operátoraival, ha a vektorpotenciál térszerű része nulla, és az időszerű komponens gömbszimmetrikus”. Azaz a probléma gömbszimmetrikus voltát a vektorpotenciál tulajdonságaival próbálják megfogalmazni. Ez természetesen nem mértékinvariáns (a fenti tulajdonságot rögzített mérték mellett állítják; általában Lorentz-mértékben, azzal a feltétellel, hogy a potenciálok a végtelenben eltűnnek).

Adjunk mértékinvariáns (azaz a térerősségekkel kifejezett) feltételt arra, hogy mikor gömbszimmetrikus egy Dirac-probléma, vagyis hogy mikor cserélhető fel az impulzusmomentum operátora a Dirac-operátorral!

(László András)

39. Vizsgáljunk egy Michelson-interferométert, amelyben egy foton található! Az egyik kar végén egy rezgő tükör helyezkedik el. A foton frekvenciája ω_c, a tükröé ω_n. A tükör elég kicsi ahhoz, hogy kvantummechanikailag tárgyaljuk, és rezgési amplitudója már másodrendben elhanyagolható az L hosszúságú karokhoz képest.
a) Írjuk fel a rendszer Hamilton operátorát!
b) Milyen állapotba kerül a rendszer t idő elteltével, ha

$$\mid \Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mid 0\rangle_A \mid 1\rangle_B + \mid 1\rangle_A \mid 0\rangle_B\Big)|0\rangle_m$$

kezdőfeltétellel indítjuk? (A, B a két karhoz, m pedig a tükörhöz tartozó állapot-indexek.)
c) Hogyan változik az interferenciacsíkok láthatósága az időben?

(Bernád József Zsolt)

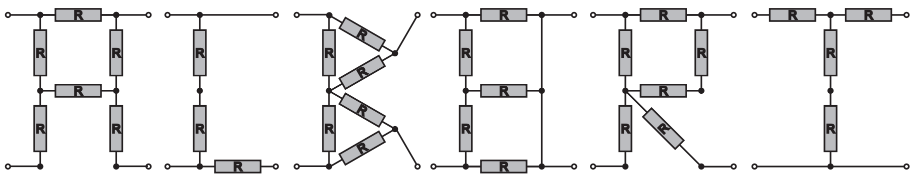
40. Vizsgáljuk a csillapított harmonikus oszcillátort, ahol a csillapító erő a sebességgel arányos! Kvantáljuk meg ezt a rendszert, és értelmezzük az eredményt!
Helyezzük most a csillapítatlan oszcillátort egy termosztátba (amit a vizsgált rendszerünkkel kölcsönható sok kis oszcillátorral modellezhetünk)! Kvantáljuk meg ezt a rendszert is, és hasonlítsuk össze az eredményt az előző részfeladat megoldásával, valamint a Brown-mozgás Einstein által is tanulmányozott jelenségével!

(Bernád József Zsolt)

41. Számítsuk ki két egymástól 10^{-6} m távolságra lévő, 1 cm^2 felületű négyzet alakú aranylemez közötti vonzóerőt a) a Casimir-effektus és b) a Van der Waals-erők alapján! Hogyan függnek ezek az erők a távolságtól és az anyagi minőségtől (arany helyett más fém)?

(Csabai István)

42. Az alábbi négypólusokból véletlenszerűen válogatva N hosszúságú négypólusláncot állítunk össze. Mi az eredő ellenállás várható értéke N függvényében? Vizsgáljuk meg a nagy N-ek esetét! *Megjegyzés*: A négypólusokat nem forgatjuk, és az eredő ellenállást a legelső négypólus szabad végei között mérjük!



(Gáspár Merse Előd)

\end{document}