A 33. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2002

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2002-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 33-ik, ezúttal már ötödször nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2002. október 31 – november 11.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2002. október 31-én, csütörtökön, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT)** magyar és angol nyelven, html, LaTeXés Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/,
http://www.saas.hu/ortvay.

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE Lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy – ha nincsenek benne képletek – közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX style file-okat használják, vagy a felhasznált speciális stilus file-okat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu vagy ortvay@saas.city.tvnet.hu

Beadási határidő: 2002. november 11. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsüri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 5-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. Készítsünk hollywoodi bombát: ha bármelyik drótját elvágjuk, felrobban! (Modell: kigyullad legalább egy izzó; egyebként semmilyen idealizáció nem megengedett, és kritikus – 0% tűrésű – sem lehet, azaz nem használhatunk fel pl. két pontosan egyenlő ellenállást). Pluszkérdés: meg lehet-e építeni ezt az eszközt anélkül, hogy meghalnánk? Tervezzük át úgy, hogy meg is lehessen csinálni! :)

   (Pál András)

2. Egy apró test csúszik egy α hajlásszögű lejtőn. A μ csúszási súrlódási együttható nagyobb, mint $\operatorname{tg}\alpha$, tehát a tetszőleges irányban meglökött test egy idő után megáll. Hogyan függ a test sebességének közvetlen megállás előtti iránya a kezdeti meglökés irányától és sebességétől?

   (Varga Dezső)

3. Egy M tömegű, vízszintes tengelyű hengerre hosszú fonalat tekertünk, s a fonál végre m tömegű súlyt akasztottunk (mint egy kerekeskút hengerére a vödröt). Mikor tekeredik le gyorsabban a fonál, ha a súly

   a) pontosan függlegesen mozog,

   b) nagyjából függőlegesen, de oldalirányban kicsit lengedezve mozog?

   A fonál szorosan van feltekerve a hengerre, s a legfelső l_0 hosszúságú darabját (egy megfelelő tartószerkezettel) nem engedjük vízszintesen elmozdulni. A kötél súlyát és a súrlódást, valamint a közegellenállást hanyagoljuk el!

   (Gnädig Péter)

4. Egy cirkuszi mutatványban egy nagyméretű, kívül bordázott tömör hengert vízszintes tengelynél fogva igen hosszú, vékony fonalakkal a magas mennyezethez erősítenek. A henger tetejére egy másik, hasonló hengert helyeznek, az alsóval párhuzamosan. A két henger tömege megegyezik, méretük azonban különböző.

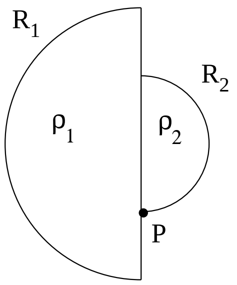
   A rendszer kimozdul instabil egyensúlyi helyzetéből, és a felső henger előbb-utóbb lerepül az alsóról. (A bordázat megakadályozza a felületek megcsúszását, de egyébként nem akadályozza a mozgást.)

   Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be a két henger tengelyét tartalmazó sík a függlegessel az elválás pillanatában!

   (Gnädig Péter)

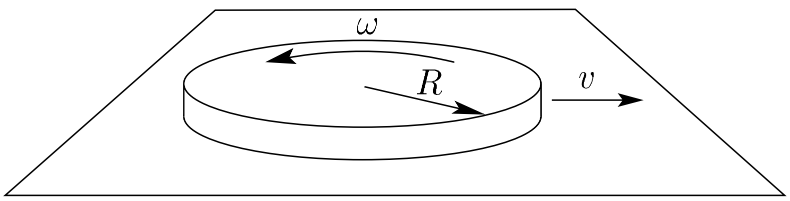
5. Mézga Aladár egyik kalandja során egy hatalmas UFO-t fedez fel. Az UFO az űrben lebeg, és két hatalmas – homogén tömegeloszlásúnak vélt – félgömbből áll, melyeket csak a gravitációs erő tart össze. Aladár a P pontban talál egy kis rést, s ott szét akarja feszíteni a félgömböket. Vajon mekkora erőre lesz szüksége?

   Blöki szemrevételezéssel megállapítja, hogy a félgömbök sugara R_1, illetve R_2, Aladár pedig vegyelemzéssel meg tudja határozni a sűrűségüket (ϱ_1 és ϱ_2).

   (Gagik Grigoryan, Örményország, feladata nyomán)

6. Egy asztalon fekvő CD lemezt véletlenül meglöktem úgy, hogy csúszott is és forgott is (ld. ábra). A lemez egyenes vonal mentén mozgott, eközben végig az oldalán feküdt, majd hamarosan megállt a súrlódás miatt. Meglepődve láttam, hogy a kétfajta mozgás (csúszás és forgás) pontosan egyszerre állt le. Gondoltam, ez csak véletlen lehetett, a kezdeti feltételen múlott. De nem! Azt találtam, hogy bárhogy löktem is meg, mindig egyszerre állt le a csúszás és a pörgés, sosem fordult elő, hogy a forgás leállt, de még csúszott egy kicsit, vagy a hogy a csúszás leállt, de még pörgött egy kicsit. A két triviális esetet – kezdetben csak csúszik vagy csak pörög – most kizárom. Próbáld ki Te is, és magyarázd meg a jelenséget!

   Megjegyzés: fontos, hogy a lemez és az asztal (vagy más vízszintes felület, pl. padló, szőnyeg) teljesen sík legyen, továbbá a megfigyelés miatt hasznos, ha a súrlódás nem olyan nagy, hogy a mozgás nagyon gyorsan leálljon. Én a CD – szőnyeg párosítást találtam a legmegfelelőbbnek a jelenség demonstrálásához.

   (Zorge Salamon)

7. Írjuk le két elektron klasszikus mozgását mágneses térben! Vizsgáljuk a pályák stabilitását!

(Kaufmann Zoltán és Cserti József)

8. Egy (háromdimenziós térben mozgó) tömegpont Hamilton-függvénye

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = pc(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}),$$

ahol $p = |\mathbf{p}|$, $c(\mathbf{r})$ és $U(\mathbf{r})$ pedig a hely adott függvényei, $c(\mathbf{r}) > 0$.

a) Írjuk fel a mozgás Hamilton-féle kanonikus egyenleteit, és fejezzük ki belőlük a részecske $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ gyorsulásvektorát! Hozzuk ezt az egyenletet minél egyszerűbb ekvivalens alakra! Mi a $c(\mathbf{r})$, illetve az $U(\mathbf{r})$ függvények szemléletes jelentése?

b) Számítsuk ki az impulzusmomentumot, és a részecske tömegét!

c) Számítsuk ki a rendszer Lagrange-függvényét, majd próbáljuk meg belőle visszaszámolni a Hamilton-függvényt! Milyen furcsaságot veszünk észre? Hogy lehetne ezt a problémát kicselezni, és a rendszer mozgásegyenleteit mindennek ellenére Lagrange-formalizmussal leszármaztatni?

d) Tárgyaljuk meg azt a két speciális esetet, amikor a $c(\mathbf{r})$, illetve az $U(\mathbf{r})$ függvények állandók! Milyen lesz a mozgás, ha ezek a függvények a tér két félterében állandók, de a határfelületen véges ugrásuk van? Mi a helyzet, ha csak az egyik, illetve ha mindkét függvény értéke ugrik a felületen?

e) Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor az $U(\mathbf{r})$ és $c(\mathbf{r})$ függvények csak az origótól mért $r = |\mathbf{r}|$ távolság függvényei! Mi a feltétele az origó körüli R sugarú körpálya kialakulásának? Mikor stabil ez a körpálya? Írjuk fel a végtelenből érkező részecske szórásproblémájának differenciális hatáskeresztmetszetét!

f) Pótkérdés: mi köze a fenti problémához Alicenak, valamint Fermat és Einstein uraknak?

(Dávid Gyula)

9. Vizsgáljunk a hiperbolikus síkon n darab tömegpontot, melyek egymás potenciálmezejében mozognak. Milyen lesz az itt felépíthető klasszikus mechanika, feltéve, hogy lokálisan azonos az euklidészi térben megszokottal? Mik a szimmetriák, mi felel meg a lendület és perdület megmaradásának? Mi az összefüggés a különböző pontokra vonatkoztatott perdületek között? Elemezzük a newtoni gravitációs törvény és a síkbeli harmonikus oszcillátor itt alkalmazható alakjait!

(Pozsgay Balázs)

10. Egységnyi tömegű pontszerű testeket egységnyi hosszúságú és egységnyi erős rugókkal összekötve egy végtelen félegyenes mentén helyezünk el. Kezdetben az egész rendszer áll, majd a legszélső testet hirtelen egyenletesen húzni kezdjük. Hogyan mozog a lánc N-edik tagja? Vizsgáljuk meg a kontinuum-határátmenetet is!

(Gnädig Péter)

11. Egy nem-lokális rugalmas kontinuum $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjában létrejött feszültség nem csak az $\mathbf{r}$ helyen kialakuló deformációtól függ, hanem az $\mathbf{r}'$-ben mérhető deformációtól is:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}) = \int_V C_{iklm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\varepsilon_{lm}(\mathbf{r}')dV',$$

ahol σ_{ik} a nem-lokális feszültségtenzor, ε_{lm} a szokásos deformációs tenzor, V az anyag térfogatát jelöli (esetünkben legyen végtelen). Végül C_{iklm} a hosszútávú kölcsönhatást közvetítő tenzor (az általánosított Hooke-törvénynek megfelelően), amely homogén izotróp közegben a következő alakú:

$$C_{iklm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda_0\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu_0\beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}),$$

ahol λ_0 és μ_0 a hosszúhullámhosszú közelítésben (hagyományos kontinuumban) használt Lamé-állandók. Az $\alpha(\mathbf{r})$ és $\beta(\mathbf{r})$ ismeretlen függvények. A ϱ sűrűségű kontinuum mozgásegyenlete térfogati erők hiányában a szokásos alakú:

$$\partial_j \sigma_{ij} = \varrho\, \partial_t^2 u_i.$$

Mutassuk meg, hogy ha ismerjük az anyagban terjedő longitudinális és transzverzális hullámok diszperziós összefüggéseit, akkor ebből az $\alpha(\mathbf{r})$ és $\beta(\mathbf{r})$ függvények Fourier-transzformáltjai meghatározhatók! Legyenek a longitudinális és transzverzális hullámok diszperziós relációi az alábbi alakúak:

$$\omega^2 = \begin{cases} \frac{c^2k^2}{D(k^2)}, & \text{ha } |\mathbf{k}| \le k_B, \\ 0, & \text{ha } |\mathbf{k}| > k_B, \end{cases}$$

ahol $c = c_L, c_T$ a longitudinális illetve tranzverzális hosszúhullámú hangsebességek, $D = D_L, D_T$ a diszperziót jellemző adott függvények, és k_B a Brillouin-zóna határa.

(Vörös György)

12. Egy dob közepén egy kis köralakú lyukat vágunk. Hogyan módosulnak a dob sajátfrekvenciái? (Feltesszük, hogy a dob membránja nem szakad el.) Mi a helyzet, ha a lyuk nem középen van?

(Cserti József)

13. Hogyan változik meg egy csőben lévő levegő rezgésének alapharmonikusa, ha a cső oldalán egy kis lyukat nyitunk? Másképp mondva: hogyan változik a furulya hangja, ha az ujjainkat emelgetjük, illetve a fuvoláé, ha a billentyűket nyomogatjuk? A numerikus megoldás elött próbáljunk perturbatív módszert találni a frekvenciaváltozás kiszámítására!

(Vukics András)

14. Képzeljünk el egy gyertyát, amely az egész $y \leq 0$ félteret kitölti, és amelynek kanóca az egész $y \leq 0$ félegyenes! Ha meggyújtjuk a gyertyát, milyen alakú lesz a tölcsér a viaszban „végtelen" idő múlva?

(Veres Gábor)

15. A –20 C° fokos fagyasztott húst mikrohullámú sütőben 600 W-on melegítünk. Adjuk meg a hőmérséklet – idő függvényt! Az m tömegű hús szárazanyag tartalma 40%, a száraz hús fajhője c.

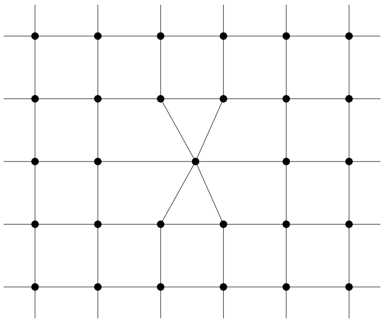
Először tekintsük azt az esetet, amikor a gőz nem távozik a sütőből, másodszor pedig vegyük állandó nyomásúnak a sütőterét!

(Pollner Péter)

16. Egy diffúziós ködkamrában alkoholgőz süllyed inhomogén hőmérsékleti viszonyok között. A kamra oldala egy egyenes henger alakú átlátszó szigetelő fal, és az alsó lapja hűtött, jó vezető fémből áll. Általában –20 C° körüli hőmérsékletre hűtik. A henger felső lapja lehet hővezető, de ez nem mindig fontos. A túlhűtött zónában kialakuló ködcsíkok szempontjából az a jó, ha a henger térfogatának alsó részén jó nagy hőmérséklet gradiens lép fel. Tervezzünk egy ködkamrát, és határozzuk meg benne a hőmérséklet függőleges profilját jól választott közelítésben! A tervezésnél a geometriai adatokat (magasság, sugár), a hőszigetelő fal adatait, és az egész konstrukció megvalósíthatóságát kell vizsgálni.

(Horváth Ákos)

17. Azonos R_0 nagyságú ellenállásokból egy végtelen négyzetrács struktúrájú hálózatot készítünk, majd az egyik élt kivesszük, és a két lecsökkent fokszámú csomópontot rövidre zárjuk. Adjuk meg a hálózat tetszőleges két pontja között az eredő ellenállást, legalábbis mutassuk meg, hogy ki tudnánk egzaktul számolni, és számoljuk ki néhány pontpárra!



(Gáspár Merse Előd)

18. Két α szöget bezáró, földelt vezető félsík a közös élük mentén illeszkedik egymáshoz. A síkok szögfelezőjében, a metszésvonaltól r távolságban L hosszú, Q töltéssel egyenletesen feltöltött pálca található ($L \gg r$).

a) Mekkora erő hat a pálcára, ha 2π páros egész számú többszöröse α-nak?

b) Mekkora erő hat a pálcára a fentitől eltérő α esetén?

c) Hogyan módosul az eredmény, ha a pálca nem a szögfelezőben helyezkedik el?

(Gnädig Péter)

19. Egy hosszú, függőleges üvegcsőre rövidrezárt szupravezető szolenoid tekercset erősítünk. (Menetszáma N_1, hossza ℓ_1, sugara R_1.) A csőbe bizonyos magasságból beleejtünk egy másik rövidrezárt szupravezető szolenoid tekercset, amelynek tömege m, és éppen elfér a csőben. (Menetszáma N_2, hossza ℓ_2, sugara R_2.) Kezdetben az alsó tekercsben I_0 erősségű áram folyik, a felső (mozgó) tekercsben pedig nem folyik áram.

Vizsgáljuk meg, hogyan mozog a csőben a tekercs! (Feltehetjük, hogy $\ell_{1,2} \gg R_1 \approx R_2$. A súrlódást és a közegellenállást elhanyagolhatjuk.)

(Gnädig Péter)

20. Jedlik Ányos (1800–1895) „osztógépével" nemcsak egyenes vonalakból álló optikai rácsot, hanem ún. „körrácsot" is elő tudott állítani. Ez utóbbi egy állandó menetemelkedésű síkbeli spirális, mely jó közelítéssel tekinthető koncentrikus körök egyenletes sűrűségű sorozatának. A gépet később Palatin Gergely (1851–1927), Jedlik tanítványa és bencés rendtársa tökéletesítette. Tegyük fel, hogy egy ilyen Palatin féle körrácsot, melyen egy sugár mentén 77 vonal helyezkedik el milliméterenként, és egy egyenes vonalakból álló optikai rácsot, melyen 150 vonal helyezkedik el milliméterenként, egymásra helyezünk. Keressük az általuk előállított diffrakciós képet! Kísérletileg például a következőképpen járhatunk el: Izzólámpával megvilágított kicsiny lyuk éles képét állítjuk elő egy ernyőn. Ezután a leképező objektív elé/mögé, a fénynyaláb útjába helyezzük a két rácsot, egymás után. Mit fogunk látni az ernyőn? Miért?

(Radnai Gyula)

21. Egy Mach–Zender interferométer (ld. pl. Budó: Kísérleti Fizika III., M. Born, E. Wolf: Principles of Optics) mindkét karjába egy-egy polarizátort helyezünk. Hogyan függ az interferenciakép láthatósága a polarizációs irányok által bezárt szögtől? Hogyan változik a kép láthatósága, ha az interferométerből kilépő fény útjába egy harmadik polarizátort helyezünk, amelynek állását változtatjuk? A kísérleti elrendezés megvizsgálható, sőt a kísérlet virtuálisan el is végezhető az alábbi címről letölthető program segítségével:

`http://www.physik.uni-muenchen.de/sektion/didaktik/Computer/interfer/Interferometer.zip`

(Benedict Mihály)

22. A tankönyvekben a Michelson-Morley (MM) interferométer egyik karja mindig a feltételezett „éterszél" irányába mutat. Aztán a berendezést pont 90°-kal forgatják el... Mutassuk meg, hogy a Lorentz-kontrakció hipotézise az éterszélhez képest tetszőleges szögben álló interferométer-karok esetén is megmagyarázza a MM-kísérlet negatív eredményét!

Pótkérdés: mekkora feszültség ébred az interferométer karjaiban (homogén, izotróp anyagból készült egyenes hengerek vagy négyzetes hasábok) a Lorentz-kontrakció hatására?

(Dávid Gyula)

23. A speciális relativitáselmélet szerint lehetséges az időben előre történő időutazás, ha az állónak tekintett Földről fénysebességhez közeli mozgással eltávolodunk, majd visszatérünk.

a) Tervezzünk olyan utazást, amivel a 300 évvel későbbi időben élő Köbükit meglátogathatjuk!

b) Milyen alakú zárt pályán kell mozognunk rakétánkal a térben ahhoz, hogy a legkevesebbet öregedjünk a Köbükihez vezető út során?

c) Legkevesebb mennyi sajátidő-ráfordítással lehet megduplázni az Univerzum jelenlegi életkorát?

Az út végén minden esetben vissza kell térni a Földre, és meg kell állni (azaz nemrelativisztikus sebességre kell lassulni)! A megoldás során ne feledkezzünk meg az emberi tűrőképesség korlátairól sem: az utazó által érzékelt gyorsulás nem haladhatja meg az 1 g-t, azaz a földi nehézségi gyorsulás értékét.

(Kocsis Bence)

24. Vizsgáljuk meg a relativisztikus Kepler-problémát: rögzített centrum $V(r) = -\alpha/r$ potenciálterében mozgó, a fénysebességgel összemérhető sebességű tömegpont mozgását! Adjuk meg a kötött állapotú objektum keringési pályájának egyenletét! Mekkora a „perihélium-elfordulás" szöge? (Számítsuk ki a Merkúr pályája perihélium-elfordulásának ebből az effektusból származó részét!) Milyen pályán mozog a végtelenből érkező test? Számítsuk ki a szórásprobléma differenciális hatáskeresztmetszetét, és hasonlítsuk össze a nemrelativisztikus számítás eredményével! Tanács: a számítás során célszerű a következő paraméter használata:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\alpha\sqrt{1 - v^2/c^2}}{mr^2\omega c}\right),$$

ahol c a fénysebesség, m a mozgó tömegpont nyugalmi tömege, r a centrumtól mért távolsága, v a (közönséges, hármas-)sebessége, ω pedig a szögsebessége (mutassuk meg, hogy a γ paraméter mozgásállandó, ezért elég a kezdeti pillanatban kiszámítani). Mi lehet a γ paraméter geometriai jelentése?

(Dávid Gyula)

25. A csillagközi anyag jórészt hidrogén. Egy olyan űrhajót akarunk építeni, ami valamilyen „tölcsérrel" begyűjti az útjába kerülő hidrogént, majd fúziós reaktora segítségével azt az űrhajó gyorsítására használja. Mekkora a hidrogén-begyűjtési folyamat következtében fellépő (ultra)relativisztikus közegellenállás? Hogyan befolyásolja ez az űrhajó által elérhető maximális sebességet (ha egyáltalán van ilyen)? Mennyi idő alatt juthat el az űrhajó az Androméda-ködbe? A csillagközi anyag sűrűségét tekintsük állandónak: a reális érték kb. 1 H-atom/köbméter.

(Pál András)

26. Az elmúlt években világszerte hatalmas pénzösszegeket invesztáltak a gravitációs hullámokat észlelő detektorok építésébe. Az Egyesült Államokban újonnan épült LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) az elmúlt hónapban fejezte be első mérési periódusát, de az előzetes hírek szerint nem észlelt gravitációs hullámra utaló eseményt. A mérhető, a zajszintet meghaladó tartományba csak a legvadabb csillagászati forrásokból származó jelek eshetnek.

Állítsunk korlátot a szupernova-robbanás során a gravitációs hullám csatornában felszabaduló energia maximumára! Mekkorának kell lennie annak az ideálisnak tekintett interferométernek, ami ezt a jelet érzékelheti?

(Kocsis Bence)

27. Hawking szerint a fekete lyukak termikus sugárzást bocsátanak ki, melynek effektív hőmérséklete fordítva arányos a lyuk tömegével. Vizsgáljuk meg egy (napjainkban keletkező, kezdetben 5 naptömegnyi) fekete lyuk tömegének és hőmérsékletének időbeli változását! Vegyük figyelembe, hogy a lyuk nem elszigetelt objektum, hanem a kozmikus háttérsugárzás „hőtartályában" lebeg, és azzal termikus kölcsönhatásban van. A háttérsugárzás hőmérséklete (amely jelenleg 2,7 K) az Univerzum tágulása során a Nagy Bumm óta eltelt idő $-2/3$-ik hatványával arányosan csökken. Mennyi ideig él a fekete lyuk? Milyen lehet egy fekete lyuk „halálsikolya"?

(Dávid Gyula)

28. Kvantáljuk az 7. feladatban szereplő rendszert!

(Cserti József)

29. Vizsgáljuk egy pontszerű elektromos dipól terébe helyezett töltött részecske mozgását a nemrelativisztikus kvantummechanika keretein belül! Mi a feltétele a kötött állapotok létezésének?

(Egri Győző)

30. A sebességgel arányos csillapítás kvantumos leírására javasolt egyik egyenlet az ún. Schrödinger–Kostin egyenlet:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi - ik\frac{\hbar}{2}\psi\ln\frac{\psi}{\psi^*},$$

ahol k a csillapítási tényező. Indokoljuk, hogy miért tekinthető ez az egyenlet valóban az U potenciálban mozgó, sebességgel arányos „közegellenállási" erővel csillapított tömegpont kvantummechanikai mozgásegyenletének! Keressük meg a stacionárius állapotokat! Bizonyítsuk be, hogy az energia disszipálódik!

(Ván Péter)

31. A félvezetőben az elektronok és lyukak termikus gerjesztéssel keletkeznek, és találkozásukkor rekombinációs folyamattal semmisítik meg egymást, melyet a

$$e + h \rightleftharpoons 0$$

egyensúlyra vezető kémiai reakció ír le. Egyensúlyban az elektronok ill. lyukak koncentrációja az

$$n_e = N_e e^{-E_1/kT}, \ \ n_h = N_h e^{-E_2/kT}$$

alakú Arrhenius-féle összefüggés alapján függ a T hőmérséklettől. E_1 és E_2 adott energiák. A kémiai reakcókra vonatkozó termodinamikai összefüggések alapján adjuk meg a fenti reakció reakcióállandóját és reakcióhőjét!

(Tichy Géza)

32. Autót vezetünk, és egy közlekedési lámpa felé közeledünk. Amikor a $t = 0$ időpillanatban észrevesszük, hogy a lámpa piros, távolságunk a lámpától l (normalizálható 1-re), sebességünk V. Gépkocsink maximális gyorsulása A, a fékezés maximális lassulása az egyszerűség kedvéért $-A$ (ezt könnyű általánosítani). Tudjuk, hogy a lámpa $P(t)$ valószínűség-sűrűséggel vált zöldre. Tekintsük a $P(t)$ valószínűség-sűrűség következő három modelljét:

1) Dirac-delta, azaz $P(t) = \delta(t - T)$. Ebben az esetben biztosan tudjuk, hogy a lámpa T időpontban vált át (ismert útvonalon vezetünk, ahol a zöldhullámot is ismerjük).

2) A $P(t)$ egyenletes eloszlású a $[0, T]$ intervallumban. Ekkor a $t = 0$ és a $t = T$ időpontok között bármikor átválthat a lámpa (ismert útvonal, de nincs információnk az utolsó lámpaváltás időpontjáról).

3) Exponenciális eloszlás: $P(t) \sim \exp(-t/T)$ (ismeretlen közlekedési lámpa felé közeledünk, és csak találgatni tudjuk a következő átváltás időpontját).

A vezető vérmérsékletétől függően háromféle célfüggvényt definiálhatunk:

a) Sportos vezető: Célunk az, hogy a lámpán túl levő távoli L távolságban levő pontba (várható értékben) minél hamarabb jussunk el.

b) Sportos, de szabályos vezető: Ugyanaz mint a), de van egy maximális $V_{\max}$ sebesség, amit nem léphetünk túl.

c) Energiatakarékos vezető: Minél kevesebbet fékezzünk, más szóval minimális sebességünk legyen minél nagyobb. Emellett még azt is kikötjük, hogy a lámpa zöldre váltásáig semmiképpen sem gyorsítunk.
Mi az optimális vezetési stratégia a 3 valószínűségeloszlás és a 3 célfüggvény összesen 9 kombinációjára?

(Tóth Gábor)

33. Készítsünk portfoliót! Tegyük fel, hogy három befektetési forma közül választhatunk: részvény (stock), vállalati kötvény (bond), és állami értékpapír (money market, mm). A portfolió-készítés nem mást jelent, mint hogy eldöntjük, egységnyi pénzünket milyen arányban osztjuk szét a három befektetési forma között, és eldöntjük, hogy hány évig „futtatjuk". Gondolkodjunk „buy and hold" stratégiában, azaz portfoliónkat adott számú évig bent tartjuk, a hasznot folyamatosan kivesszük (illetve a veszteséget kipótoljuk). Az inflációt és a nyereségadót az egyszerűség kedvéért hanyagoljuk el! (Uhumm...)

Tegyük fel, hogy a befektetési formák évi hozama egy három változós Gauss-eloszlást követ, az alábbi tapasztalati paraméterekkel!

Az évi hozamok várható értéke és szórása:

	várható érték	szórás
stock	10%	15%
bond	5%	6%
mm	3%	1%

A különböző hozamok egy adott évben a tapasztalat szerint korrelálnak. Az x és y változók korrelációjának definiciója:

$$C(x,y) = \frac{< (x- < x >)(y- < y >) >}{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Egy gazdasági környezet, ami kedvez a részvények árfolyamának, általában kisebb hozamot eredményez a kötvényeknél és az értékpapíroknál. Használjuk a következő paramétereket a korrelációkra:

stock – bond	−0.3
stock – mm	−0.1
bond – mm	0.2

Tegyük fel, hogy a hozamok valószínűség-eloszlása minden évben azonos, és a hozamok különböző években függetlenek (nem korreláltak)!

a) Írjuk fel egy tetszőleges összetételű, tetszőleges futamidejű portfolió várható hozamát és szórását!

b) Egy portfolió vállalt kockázatán (risk) azt a valószínűséget értjük, amivel az illető portfolió a teljes futamidő alatt nem nyereséges, hanem veszteséges lesz. Javasoljunk olyan portfolió-összetételeket, amivel adott futamidő (1–2–5–10–30 év) és adott kockázat (1%–2%–5%) mellett maximalizáljuk a várható hozamot!

c) Eredményeink alapján racionalizáljuk a következő, közszájon forgó befektetési tanácsokat: A diverzifikáció mindennél fontosabb! Ha az ember autóra gyűjt, kerülje a részvényeket, de ha a nyugdíjas éveire, akkor fektessen részvénybe!

(Bihary Zsolt)

\end{document}