A 32. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2001

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2001-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 32-ik, ezúttal már negyedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2001. október 31 – november 12.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok 2001. október 31-én, szerdán, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT) magyar és angol nyelven, html, LaTeX és Postscript formátumban letölthetők az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/,
http://www.saas.hu/ortvay vagy
http://www.nscl.msu.edu/~horvath/ortvay.html.

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE Lágymányosi Fizika-Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kívánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy – ha nincsenek benne képletek – közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX style file-okat használják, vagy a felhasznált speciális stilus file-okat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu vagy ortvay@saas.city.tvnet.hu

Beadási határidő: november 12. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsüri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 6-án lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. Egy ember megáll a mezőn, maga elé teszi a karóráját, és
a) minden másodpercben a másodpercmutató irányába fordul, majd lép egyet (természetesen a karórája vele együtt fordul). Hol lesz egy perc múlva? Jellemezzük a pályáját!
b) Az emberünk most a következő játékot játssza: csak minden n-dik másodpercben lép a mutató irányába, és ráadásul nem feltétlenül egész perckor indul. Hogyan függ a pályája n-től és a kezdő iránytól? Osztályozzuk a lehetséges pályákat!
c) Mi történik, ha a mutató egyenletesen gyorsul, azaz a számlapon a kezdőiránnyal bezárt szöge:
$$\phi = \frac{2\pi}{60}\left(at^2 + bt\right),$$
ahol $t = 1, 2, \ldots$ az idő másodpercben mérve, a és b pedig egész számok. Vannak-e periódikus pályák?
d) A mutató most nem gyorsul, de folytonosan mozog, és percenként n kört tesz meg (n egész szám), az ember pedig folytonosan halad a mutató irányába. Milyen lesz a mozgás pályája?

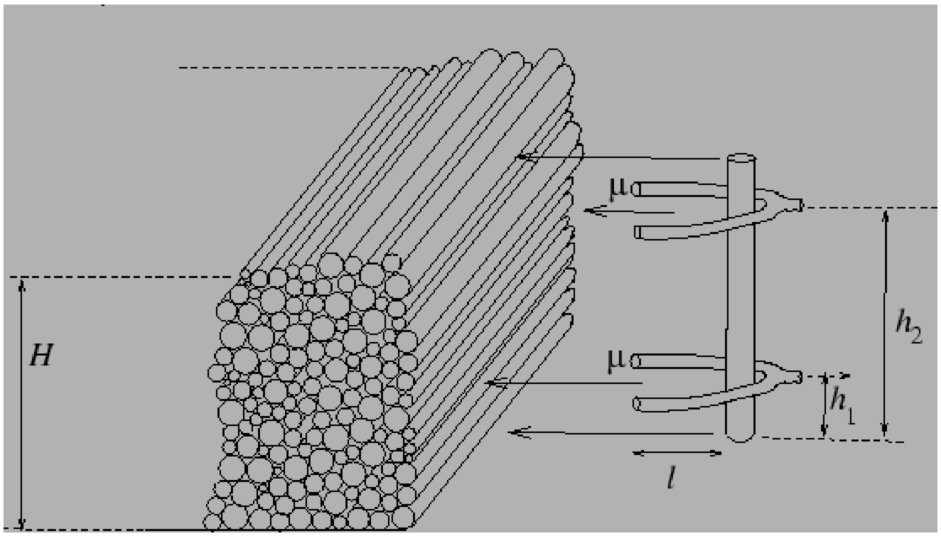
(Egri Győző)

2. Egy homogén, körlap alakú lemez vízszintes szönyegpadlón fekszik, és egyenletesen nyomja azt. Kerületének valamelyik pontjához erősített kötéllel sugárirányban húzva F_0 erővel tudjuk megmozdítani a lemezt. Mekkora F erő szükséges a lemez megmozdításához, ha érintő irányban húzzuk? (A kötél mindkét esetben vízszintes).

(Gnädig Péter)

3. Erdei fakitermelésnél kb. 1 m hosszúra darabolt rönkfákból hosszú, magas „rakatot" szoktak készíteni. A rakat végeinél egy-egy nagy, erős élő fa támasztja meg a rönköket. Ha ilyen nincs a környéken, akkor egy érdekes, szellemesen egyszerű megoldással akadályozzák meg a farakás szétgurulását.

Egy Y alakú, erősebb (karvastagságú) faágat vízszintes helyzetben a rönkök közé helyeznek olymódon, hogy két szára a rakat belsejében, vízszintes síkban legyen, azok metszéspontja pedig éppen a rakaton kívül (lásd a mellékelt ábrát). A metszéspontba függőleges helyzetben egy erős faágat helyeznek, azt ideiglenesen megtámasztják, majd



az Y szárait további rönkfarétegekkel megterhelik. A függőleges tartófát két helyen is megtámasztják Y alakú ágakkal, melyek a rájuk nehezedő fák súlya és a súrlódás hatására beszorulnak.

Milyen magasságban érdemes elhelyezni a függőleges tartófa két rögzítőjét, és milyen magas lehet a farakás, ha az Y alakú fák szárai l hosszan, gyakorlatilag párhuzamosan nyúlnak a rakatba, köztük és a rönkfák között a súrlódási együttható μ, a rönkfák egymás közötti súrlódása pedig elhanyagolható?

(Gnädig Péter)

4. Az éjszakában csendesen száguldó repülőgépen – hipp-hopp – tönkremegy a teljes elektronikus műszerpark (talán virus vagy Y2K...?). Csak a kormányszerkezet és a hajtómű marad épségben. Kint sötét van, a pilóta semmit nem lát, nem hall. Egyetlen érzékszervére hagyatkozhat csak, a gyorsulást érzékelő középfülére. Megpróbál úgy manőverezni, hogy a nehézségi gyorsulást mindig „függőlegesnek" és 1 g nagyságúnak érzékelje.

a) Mekkora sebességgel fog a repülőgép a talajba csapódni, ha kezdetben 4000 m magasban 800 km/h sebességgel vízszintesen haladt, de valamilyen perturbáció miatt letért erről a pályáról?
b) Milyen pályán mozoghat a megadott feltételek teljesülése esetén a repülőgép? (Korlátozódjunk a síkgörbékre, illetve adott R sugarú hengerpaláston való mozgásra!)

(Szokoly Gyula és Gnädig Péter)

5. Egy álló vonat padlójához súlyos rúd csatlakozik ideális (súrlódásmentes) csuklóval. A rúd a vonat haladási irányával párhuzamos függőleges síkban mozoghat. A csuklónál a Hangya áll a padlón. Hangyánk csak ε erőt tud kifejteni, ahol ε tetszőlegesen kis érték. Kezdetben a rúd instabil helyzetben, függőlegesen áll, a Hangya egyensúlyozza. Egyszer csak a Gonosz Masiniszta, aki azt szeretné, hogy a rúd a padlóra csapódjon, bejelenti, hogy el fog indulni a vonattal, és egy általa választott $a(t)$ függvény szerint fog gyorsítani egyenes pályán. A gyorsulásfüggvényt meg is mutatja a Hangyának. A „kísérlet" a Gonosz Masiniszta által választott véges T ideig tart, de hogy mikor kezdődjön, azt a Hangya mondhatja meg. El tudja-e érni szegény Hangya, hogy a kísérlet végéig a rúd ne csapódjon a padlóhoz? Az $a(t)$ gyorsulásfüggvény mely tulajdonságain múlik ez?

(Fige Péter és Wágner Ferenc)

6. Centrális $V(r)$ erőtérben pontrészecske mozog. Egy ideig figyelve a részecskét, meglepetéssel tapasztaljuk, hogy egy olyan ρ sugarú köríven mozog, amelynek középpontja nem esik egybe az erőtér centrumával, hanem attól R távolságban van ($R > \rho$).

Határozzuk meg a $V(r)$ potenciálfüggvényt! Milyen lesz a részecske további pályája?

(Dávid Gyula)

7. Mindenki szeret túrázni, de mindenkinek más az öröm a túrázásban. Tegyük fel, hogy egy turista adott idő alatt el akar jutni A pontból B pontba. Rendelkezésére áll a terep domborzati térképe, azaz ismeri a $h(\mathbf{r}) = h(x, y)$ függvényt. (A feladatban szereplő vektormennyiségeket tekintsük kétdimenziósnak, z irányú komponenseiket hanyagoljuk el!) Túrázása során minimalizálni akarja a szívását. A szívás (Sucking) teljes mennyisége a fáradozás (Labor) függvény időintegrálja:

$$S = \int_A^B L\, dt$$

Különböző fáradság-függvényeket definiálhatunk. Senki sem szeret nagy sebességgel futkározni jobbra-balra, a függvény első tagja ezért arányos a sebesség négyzetével:

$$L_1 = \frac{a}{2}\, v^2.$$

Felfelé nehezebb kaptatni, lefelé öröm menni:

$$L_2 = b\, \mathbf{vg},$$

($\mathbf{v}$ a turista sebességvektora, $\mathbf{g} = \nabla h$ a terep gradiense.) Sokszor azonban a meredek lefelé-menet épp olyan fáradságos, mint a kaptató:

$$L_3 = \frac{c}{2}\, (\mathbf{vg})^2.$$

A fenti kifejezésekben a, b és c pozitív állandók.

a) Írjuk fel és értelmezzük a turista Euler–Lagrange-egyenleteit az egyes felsorolt esetekben! Milyen útvonalak és túra-stratégiák adódnak? Mozgásállandó-e az „energia"? Ha igen, mi a jelentése az „energia-megmaradásnak"?

b) Tekintsünk most egy kiegyensúlyozott túrázót, akinek a fáradság-függvénye az eddigi tagok összege:

$$L = L_1 + L_2 + L_3.$$

Turistánknak meg kell kerülnie egy kúp alakú hegyet, azaz legyen $h(x, y) = -G\,\sqrt{x^2 + y^2}$, ahol $G > 0$ konstans. Tegyük fel, hogy $h_A = h_B$. Milyen útvonalat válasszon? Hogyan haladjon rajta végig?

c) Javasoljunk egy saját fáradság-függvényt, legalább egy lényegesen új taggal, és vázoljuk az eredményül adódó túra-stratégiát!

(Bihary Zsolt)

8. Két egyforma magas villanypózna egymástól 50 méter távol van. A póznák teteje között egy acélhuzalt feszítettek ki. A huzal legnagyobb belógása 1 m.

Mekkora lesz a legnagyobb belógás, ha a huzal közepére egy 2 méternyi acélkábellal megegyező súlyú galamb száll?

(Gnädig Péter)

9. Egy hosszú vasrudat hossztengelyének irányában meghúzva rögzítünk, majd körülöntjük betonnal úgy, hogy a beton L hosszúságban a vasrúddal koncentrikus hengerben helyezkedjen el. Miután a beton megkötött, megszüntetjük a vas előfeszítését. Határozzuk meg a szerkezetben a deformációt és a feszültséget! (Tegyük fel, hogy a beton és a vas a találkozási felületen tökéletesen összeragadnak.)

(Bodor András)

10. Egy lufi laza állapotban hosszú, vékony henger alakú. Milyen lesz az alakja felfújás közben? Végezzünk kísérleteket, és magyarázzuk meg a tapasztalatokat!

(Bodor András)

11. Korábban a vízvezetékeket vasból készítették, ma már terjedőben vannak a rézcsövek. Általában a rézcsövek sokkal kisebb átmérőjűek, mint a vascsövek. Miért lehet vékonyabb rézcsővel dolgozni, mint a vassal?

(Pollner Péter)

12. Beleneztem a zseblámpám parabolatükrébe, és nagyon meglepődtem, ugyanis két példányban láttam magamat. Miért? A zseblámpa ki volt kapcsolva, a tükör kb. 4 cm átmérőjű és 3 cm mély.

(Bodor András)

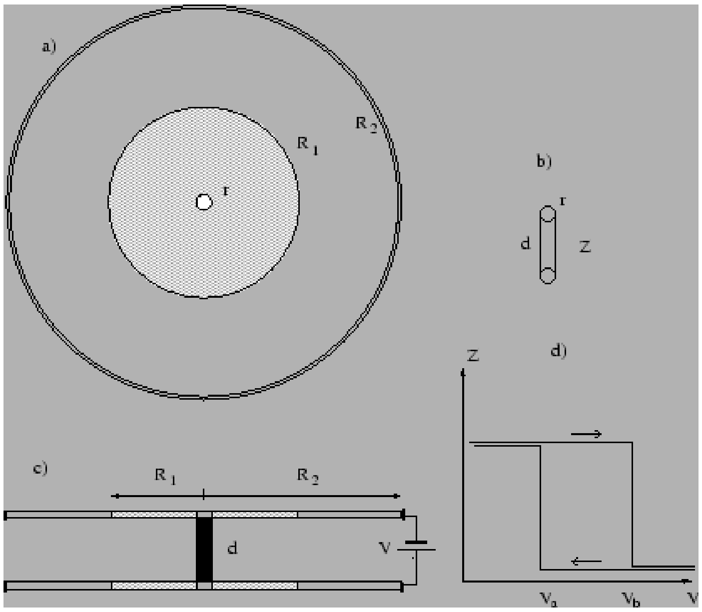
13. Az atomok Thomson-modellje szerint egyenletes eloszlású pozitív töltésfelhőben pontszerű elektronok mozognak. A teljes rendszer kifelé elektromosan semleges. Keressünk egyensúlyi elektronkonfigurációkat a különböző rendszámú atomok Thomson-modelljében! (Pl. a négyes rendszámú berillium esetén egyensúlyi konfigurációt képviselnek a tetraéder ill. a négyzet csúcsai, a háromszög csúcsai és középpontja, valamint az egy vonalban elhelyezkedő négy elektron.) Vizsgáljuk meg a konfigurációk stabilitását! Hogy nézne ki a periódusos rendszer? Léteznek-e bűvös számok, halogének és alkáli fémek?

(Bodor András)

14. Szupravezető anyagból egy elektromágnest készítünk. A berendezés tetszőleges elrendezésű, véges vastagságú vezetékekből áll. A felhasznált „szupravezető" anyag olyan tulajdonságú, hogy belsejébe behatolhat a mágneses tér (mintha egy klasszikus vezető lenne), de ha bárhol a belsejében a mágneses tér elér egy bizonyos B_0 értéket, az anyag megszűnik szupravezető lenni. Ezt a helyzetet el akarjuk kerülni. Legfeljebb mekkora lehet az elérhető mágneses tér a vezeték anyagán kívül?

(Varga Dezső)

15. Az a), b) és c) ábrákon látható berendezés (amelyet egyébként részecskedetektálásra használnak) két egyforma, egymástól d távolságra párhuzamosan elhelyezett köralakú kondenzátorlemezből áll. Az ábrán jelölt sugarakra



fennáll: $r \ll R_1 \ll R_2$. Az R_1 és R_2 közti gyűrű nagyon rossz vezetőképességű anyagból készült, a középső, R_1 sugarú kör, valamint a gyűrűt körülvevő (az áram bevezetésére szolgáló) vékony perem viszont nagyon jó vezetőképességű. Jóval a kísérlet megkezdése előtt a külső peremre állandó V feszültséget kapcsolunk, és megvárjuk, hogy beálljon a stacionárius állapot. Ekkor (a $t = 0$ időpontban) a kondenzátor közepét „rövidre zárjuk" (lásd a c) ábrát) egy r sugarú hengeres ellenállással, amelynek Z impedanciája a d) ábrán látható hiszterézises karakterisztikát mutatja: az ellenállásra kapcsolt feszültséget nulláról növelve V_b értéknél a kezdeti igen nagy ellenállás elenyészően kicsire csökken; a rákapcsolt feszültséget V_b-nél nagyobb értékről folyamatosan csökkentve viszont az ellenállás csak egy kisebb V_a feszültség alatt tér vissza az eredeti nagy értékre ($V_a < V_b$).

A kísérlet során a jól vezető külső peremen a feszültséget végig a rögzített V értéken tartjuk, ahol $V > V_b$.

Adjuk meg az ellenálláson folyó áramot az idő függvényében! Hogyan változik eközben a feszültség az R_1 sugárnál, a jó és a rossz vezetőképességű anyag határvonalán?

(Vesztergombi György)

16. Ismert, hogy egy elektron homogén mágneses térben körpályán mozog (a relativisztikus korrekcióktól eltekintünk). Mi történik, ha nincs egyedül? Vizsgáljunk két elektront homogén mágneses térben, amelyek a térre merőleges síkban mozognak. Alkalmasan megválasztott kezdőfeltételek mellett a két elektron közös körpályán kering. Mekkora ennek a sugara? Vannak-e egyéb periodikus megoldások?

Mi történik, ha az egyik elektront pozitronnal helyettesítjük? Annihilálódhat-e a két részecske (találkozhatnak-e), és ha igen, milyen kezdőfeltételek mellett?

Próbáljunk (kvalitatív) leírást adni a sokelektron-rendszerről (az összes elektron egy közös síkban mozog, mely a mágneses térre merőleges)!

(Asbóth János)

17. Asztalon fekvő $\mathbf{m}$ mágnesezettségű (az $\mathbf{m}$ vektor iránya legyen merőleges az asztal síkjára) kicsi mágnesre h magasságból egy R ellenállású és a sugarú vékony vezető karikát ejtünk. Tegyük fel, hogy a karika tengelye mindvégig függőleges irányú, és átmegy a mágnesen! Írjuk le a karika mozgását! Mennyi idő alatt esik le a karika az asztalra?

(Cserti József)

18. Felváltva n_1 és n_2 törésmutatójú, d_1 és d_2 vastagságú síklapokat helyezünk egymásra, kialakítva egy végtelen periodikus szerkezetet. Írjuk fel a síklapokra merőlegesen terjedő fény diszperziós relációját meghatározó egyenletet! Mutassuk meg, hogy kialakulhatnak ún. optikai gap-ek, azaz olyan tiltott frekvenciatartományok, amelyekre nem lehetséges a fény terjedése a periodikus szerkezetben! Milyen kvantummechanikai rendszerrel analóg az optikai elrendezésünk? Legyen $d_1 = \lambda_1/4$ és $d_2 = \lambda_2/4$, ahol λ_1 és λ_2 az $\omega_0 = c\pi/(d_1 + d_2)$ körfrekvenciájú fény hullámhossza az n_1 ill. n_2 törésmutatójú közegben. Vizsgáljuk a hosszú hullámhosszú határesetet ilyen elrendezés esetén, és számítsuk ki az optikai gap nagyságát!

(Cserti József)

19. Az alábbi URL-en egy olyan cikk található, amely néhány termodinamikai paradoxont, illetve másodfajú örökmozgót ismertet.

http://www.padrak.com/ine/SHEEHAN.html

A paradoxonok mind a termodinamika második főtételével kapcsolatosak. Olvassuk el a cikket, és válasszunk egyet az ismertetett paradoxonok közül! Támasszuk alá vagy cáfoljuk meg állításait!

(Martinás Katalin)

20. Sörös Szilárd a kutatásaihoz használt folyékony nitrogénjét, valamint a sörét szeretné minél gazdaságosabban hidegen tartani. Azon mesterkedik, hogy egy olyan berendezést építsen, mely csak izoterm folyamatokat tesz lehetővé.

– Veszek egy alul zárt furfangos alakú tölcsért – gondolja Szilárd. – A tölcsérben lévő gázt felül egy higanyréteggel zárom el a külvilágtól. A higany helyzete a tölcsérben meghatározza a bezárt gáz térfogatát, de a higanydugó vastagságát is. Ez utóbbi pedig megadja a bezárt gáz nyomását. Így már csak egy olyan alakú tölcsért kell találnom, amely a pV szorzatot állandó értéken tartja, és ekkor történjék bármi, a gáznak nem változhat a hőmérséklete. Segítsünk Sörös Szilárdnak, és találjuk meg a megfelelő alakú csövet!

(Kormos Márton)

21. Próbáljuk meg a gravitációs jelenségek leírását a speciális relativitáselméleten belül! (Ténylegesen voltak ilyen kísérletek 1905 és 1915 között.) Legyen a gravitációs gyorsulás egy (négyes) skalárpotenciál gradiense! Modellünk adja vissza a gravitációnak azt az alapvető sajátosságát, hogy az erő arányos a tömeggel, azaz a különböző tömegű testek egyforma gyorsulást éreznek! Melyik tömegfogalmat kell használnunk? Milyen szokatlan feltevésekkel kell élnünk a tömegre vonatkozóan? Írjuk fel a mozgásegyenletet, és oldjuk meg néhány egyszerű esetben (szabadesés és ferde hajítás homogén gravitációs térben, radiális zuhanás az űrből a Földre stb.)! Vizsgáljuk meg a Merkúr perihélium-elfordulásának problémáját, és hasonlítsuk össze az általános relativitáselmélet ismert eredményével! Állítsuk fel azt a variációs elvet, amelyből mozgásegyenletünk következik! Vizsgáljuk meg a mozgás során az energiaviszonyokat is! Miért nem elfogadható ez a relativisztikus gravitációelmélet, miért kell helyette másikat (az általános relativitáselméletet) megtanulnunk?

(Dávid Gyula)

22. Gyakran mondják azt, hogy az általános relativitáselmélet csak annyiban különbözik Newton gravitációelméletétől, hogy a newtoni skaláris gravitációs potenciál helyett a négyestenzort alkotó g_{kl} mennyiségeket használja. További különbség persze a relativitás elvének konzekvens figyelembe vétele – de ezt már a speciális relativitáselmélet is tartalmazza.

Vizsgáljuk meg ezért a speciális relativitáselmélet keretein belül a tenzormezőben történő mozgás problémáját! Írjuk fel a szimmetrikus négyestenzor-mezőben mozgó részecske hatásintegrálját! Vezessük le a mozgásegyenleteket! Hasonlítsuk össze az így kapott egyenleteket az általános relativitáselmélet szabad részecskéjére vonatkozó geodetikus mozgásegyenletekkel! Mik a hasonlóságok, és mik a fő különbségek?

(Dávid Gyula)

23. Albert Zweistein professzor új elmélete, a hipergravitáció (speciális) relativisztikus elmélete végre szakít azzal az ősi babonával, mely szerint a gravitációs erő nagysága a test tömegével arányos. A hipergravitáció elméletében ehelyett a tömeg N-ik hatványa szerepel. Itt N lehet pozitív, negatív és nulla, egész vagy tört értékű is (a további általánosítás komplex N-ekre folyamatban van). Az M tömegű testre ható négyeserő tehát:

$$F_k = M^N \partial_k \Phi,$$

ahol Φ a négyesskalár jellegű hipergravitációs potenciál, ∂_k pedig a négyesgradiens operátora.

Írjuk fel a hipergravitációs mezőben mozgó M tömegű pontrészecske mozgásegyenletét, és alakítsuk át háromdimenziós, *gyorsulásvektor = valami/tömeg* alakúra!

Vizsgáljuk meg az egydimenziós mozgást sztatikus hipergravitációs mezőben (azaz akkor, ha létezik egy inerciarendszer, amelyben a mező a rendszeridőtől független)! Írjuk fel az energiaintegrál hipergravitációs-relativisztikus megfelelőjét! Számítsuk ki a részecske sebességét adott kezdőfeltételek és adott hiperpotenciál-konfiguráció esetén! Mennyi idő alatt juthatunk el így az Androméda-ködbe?

(Dávid Gyula)

24. Homogén, izotróp, kritikus tömegű világegyetemben (Robertson–Walker-metrika, $\Omega = 1$, $\Lambda = 0$) egymástól 1 méterre elhelyezünk két nagyon kis tömeget. A testek kezdetben „nyugalomban" vannak (azaz a valós térben mért sebességük egymáshoz képest nulla — nem tévesztendő össze az együttmozgó rendszerben értelmezett nyugalommal!). A testek a metrikát nem változtatják meg (és így egymást sem vonzzák), viszont a metrikára reagálnak. Addig várunk, amíg a világegyetem duplájára tágul (a hosszparaméter megduplázódik). Milyen messze lesz egymástól a két test? A Univerzum az anyag által dominált fázisban van.

(Szokoly Gyula)

25. Két azonos fajtájú, m tömegű, feles spinű és γ giromágneses tényezőjű ($\boldsymbol{\mu} = \gamma\hbar\boldsymbol{S}$) részecskét összekötünk egy merev, súlytalan, L hosszúságú rúddal. A rudat rögzítjük a középpontjánál úgy, hogy egy a hosszára merőleges tengely körül szabadon foroghat. A részecskék a mágneses dipólusaikon keresztül hatnak kölcsön. Írjuk fel a rendszer Hamilton-operátorát, majd határozzuk meg *egzaktul* az összes sajátállapotát és a megfelelő sajátenergiákat. Mi az alapállapot? Érvényesül a perdületmegmaradás a sajátállapotokban? Szemléltessük a jellemző sajátállapotokat: ábrázoljuk a mágneses momentum sűrűségének térbeli eloszlását, a csak az egyik részecskéhez tartozó momentumsűrűséget, és az eredőt is!
Útmutatás: Válasszuk a z tengelyt a forgástengellyel párhuzamosan, a spineket ebben az irányban kvantáljuk, és ne feledkezzünk meg a Pauli-elvről!

(Fehér Titusz)

26. Egy spin nélküli töltött részecske időben állandó homogén mágneses térben mozog úgy, hogy térbeli mozgása egy féltérre korlátozott, azaz a részecske potenciális energiája zérus a féltéren belül, és végtelen a félteret határoló sík mentén. Legyen a mágneses tér iránya párhuzamos a félteret határoló síkkal! Határozzuk meg a részecske energiaspektrumát! Melyek a megmaradó mennyiségek és a kvantumszámok? Hogyan módosulnak a Landau-nívók a részecske térbeli mozgásának korlátozásával? Milyen klasszikus mozgásnak felelnek meg a különböző kvantumállapotok?
Útmutatás: Használjunk alkalmas mértéket!

(Cserti József)

27. Bizonyítsuk be elméleti vagy numerikus úton, hogy
a) A H^- ion stabil
b) A H^{--} ion instabil.

Kutassunk fel az irodalomban kísérleti eredményeket, amik alátámasztják számolásainkat!

(Bihary Zsolt)

28. Tanulmányozzuk egy síkrotátor termodinamikáját alacsony és magas hőmérsékleten! Határozzuk meg az entrópiát, a fajhőt és a szuszceptibilitást a hőmérséklet függvényében. Ez utóbbit a $\hat{H}_i = h\cos\phi$ kölcsönhatási Hamilton-operátorral megadható kicsiny mágneses térre adott válaszból számíthatjuk. Hol a határ az alacsony és magas hőmérsékleti viselkedés között?

(Borsányi Szabolcs)

29. Vizsgáljuk a harmonikus oszcillátort a $\hat{H}_1 = \lambda \exp\left(-\hat{p}^2\sigma^2/2\right)$ operátorral perturbálva (λ és σ konstansok). Számítsuk ki az alap- és az első gerjesztett állapot λ-ban elsőrendű korrekcióját zárt alakban!

(Borsányi Szabolcs)

30. Vizsgáljunk egy időben változó frekvenciával jellemezhető kvantum-oszcillátort.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2 \qquad \omega^2 = \omega^2(t)$$

Bontsuk a Heisenberg-képbeli operátorokat léptető operátorok lineárkombinációjára minden időpontban! Keressük a tetszőleges t időben értelmezett $\hat{a}(t)$, $\hat{a}^+(t)$ operátorokat a $t = 0$-beli $\hat{a}(0)$, $\hat{a}^+(0)$ léptető operátorok lineárkombinációjaként (Bogoljubov-transzformáció):

$$\hat{a}(t) = \mathcal{F}_+(t)\hat{a}(0) + \mathcal{F}_-(t)\hat{a}^+(0).$$

Mekkora valószínűséggel fordul elő a t időpontban az $\hat{a}^+(0)|0\rangle$ módon definiált állapot? Végezzünk el konkrét numerikus vagy analitikus elemzést az $\omega^2(t) = u + v\sin\Omega t$ speciális esetben!
Útmutatás: Keressük az oszcillátor időfejlődését meghatározó Heisenberg-egyenlet megoldásait

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(t=0)}}\left[\hat{a}(0)f_+(t) + \hat{a}^+(0)f_-(t)\right]$$
$$\hat{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(t=0)}}\left[\hat{a}(0)\dot{f}_+(t) + \hat{a}^+(0)\dot{f}_-(t)\right]$$

alakban! Fogalmazzuk meg az együtthatókra vonatkozó kezdőfeltételeket alapállapotból induló oszcillátorra! Ellenőrizzük, hogy a felcserélési relációt változatlanul hagyja az időfejlődés! Adjuk meg a keresett valószínűséget $f_\pm$ és $\dot{f}_\pm$ segítségével!

(Patkós András és Borsányi Szabolcs)

31. Azokat a kristályokat, amelyek rácsállandóját erősen befolyásolják a részecskék zérusponti rezgései, kvantumkristályoknak nevezzük. Tanulmányozzuk a problémát egy egyszerű egydimenziós modell segítségével! Tekintsünk egy azonos tömegű részecskékből álló hosszú periodikus láncot! Tételezzük fel, hogy a kristály hullámfüggvénye a rácspontokban koncentrált egyrészecske-függvények szorzata:

$$\Psi(..., x_j, ...) = \prod_j \phi(x_j - ja),$$

ahol x_j a j-edik részecske koordinátája, a a rácsállandó. Tételezzük fel továbbá, hogy a potenciális energia az első szomszédok közti párkölcsönhatások összege:

$$U(..., x_j, ...) = \sum_j V(x_{j+1} - x_j).$$

a) Fejezzük ki az egy részecskére jutó kinetikus, potenciális és összenergiák várható értékét V és ϕ segítségével!

Tételezzük most fel, hogy a (nemnormalizált) egyrészecske-függvények Gauss-függvények, σ szórással:

$$\phi(x) = e^{-x^2/2\sigma^2},$$

és a párpotenciál Morse alakú:

$$V(x) = D(e^{-2\alpha(x-x_0)} - 2e^{-\alpha(x-x_0)}).$$

A Morse-párpotenciálok paramétereit különböző nemesgázokra a mellékelt táblázat tartalmazza.

nemesgáz	D (10^{-21} J)	x_0 (nm)	α (1/nm)
He	0.14	0.29	21
Ne	0.50	0.31	18
Ar	1.67	0.38	15
Kr	2.3	0.41	14
Xe	3.2	0.45	13

b) Készítsünk ábrát a Morse-potenciálról! Mi a D, x_0, α paraméterek fizikai jelentése? Klasszikus rács esetén, a zérusponti rezgés elhanyagolásával mi lenne a rácsállandó?
c) Fejezzük ki az egy részecskére jutó összenergia várható értéket és minimalizáljuk az a és σ variációs paraméterek szerint! Minden nemesgázra stabil a kristály? Hogyan függ a kristály rácsállandója és a részecskék zérusponti delokalizációja a potenciál paramétereitől és a részecskék tömegétől? Keressünk olyan dimenziótlan paramétert, ami jellemzi a kristály kvantumosságának mértékét, és taglaljuk a nemesgáz-kristályoknál tapasztalható tendenciát! Kutassunk fel az irodalomban eredményeinket alátámasztó kísérleti tapasztalatokat!

(Bihary Zsolt)

32. A nemrelativisztikus kvantummechanika keretein belül szeretnénk két különböző tömeghez tartozó, síkhullám alakú hullámfüggvényt szuperponálni:

$$\Psi = \left[\varphi_1(m_1, \mathbf{r}, t) + \varphi_2(m_2, \mathbf{r}, t)\right] / \sqrt{2},$$

azaz ha megmérnénk a részecske tömegét, akkor $1/2$ valószínűséggel m_1 ill. m_2 eredményt kapnánk. Végezzünk a rendszeren egy $\mathbf{v}$ sebességű Galilei-transzformációt, egy $\mathbf{a}$ távolságú eltolást, majd ismét egy $-\mathbf{v}$ sebességű Galilei transzformációt és egy újabb eltolást, hogy visszajussunk az eredeti koordinátarendszerbe! Mutassuk meg, hogy a transzformációk eredményeképpen a φ_1 és φ_2 különböző fázisokat kap, így végül Ψ fizikailag kimérhető változást szenved!

Mekkora fáziskülönbség lép fel a φ_1 és φ_2 között a következő folytonos transzformáció során:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}(t),$$

és $\boldsymbol{\xi}(t) = 0$, ha $t < 0$ vagy $t > T$? Mutassuk meg, hogy a fellépő fáziskülönbség valójában egy c-ben nulladrendű relativisztikus jelenség, amely nem tűnik el a nemrelativisztikus határesetben!

(Egri Győző)

33. Labdázzunk gluonokkal! Képzeljünk el egy nagy energiájú proton-proton ütközést ($\sqrt{s} = 16$ GeV) a tömegközéppónti rendszerben úgy, hogy a protonok „on-shell" tömegtelen gluonokat cserélnek, miközben magasabb tömegű rezonanciára gerjesztődnek. Az ütközés eredménye két szétrepülő, nagy tömegű barion lesz, amelyek aztán – esetleg több lépésben – mezonokra és barionokra bomlanak. Vizsgáljuk meg az első fázist, a gerjesztődést! Ennek menete: az egyik proton kibocsát egy gluont a gluonok proton-beli struktúrafüggvényének megfelelő eloszlású véletlen számként kisorsolt longitudinális impulzussal (a transzverzális impulzust vegyük zérusnak). Ezt a szembe repülő proton elnyeli. A következő lépésben a protonok szerepet cserélhetnek.

Mennyivel változik meg a protonok tömege egy ilyen „csere" során? Igaz-e, hogy kis impulzusú gluonokkal nagy rezonanciatömegeket gerjeszthetünk? Mi a helyzet az „elnyelő" proton koordináta-rendszerében? Mennyi az „elnyelő" protonnak átadott impulzus, ha azt a rugalmatlan szórás leírásában szokásos képlettel számoljuk? Tudjuk, hogy a proton nem képes gerjesztésre, ha több mint 1 GeV impulzust adunk át neki, helyette „szétesik". A fenti példában túllépjük-e ezt a határt, ha 5 GeV tömegű rezonanciát szeretnénk kapni? Tudunk-e más Lorentz-invariáns mennyiséget javasolni az átadott impulzus mérésére? Próbáljuk meg tisztázni a feladat szövegében nem precízen definiált fogalmakat és állításokat! Ne csak elvi megfontolásokra, hanem a szereplő mennyiségek nagyságára is koncentráljunk!

(Veres I. Gábor)

34. A világűrből időnként óriási energiájú részecskék érkeznek a Földre. Eddig 14 olyan részecskét (nagy valószínűséggel protont) detektáltak, melynek energiája 10^{20} eV fölött volt. A rekorder a Fly's Eye nevű detektor által látott $\approx 3 \times 10^{20}$ eV energiájú részecske.

Ezen részecskék keletkezésének egy lehetséges modellje a következő: Az ősrobbanás elmélete a háttérsugárzáshoz hasonlóan megjósolja egy neutrinó-háttér létezését is (kb. 56 neutrinó cm^3-enként). Ezek lényegében nyugalomban lévő neutrinók. Feltételezhetően nagyenergiás protonokon kívül nagyenergiás neutrinók is nagy számban érkeznek a Földre. Ezen nagyenergiás neutrinók az álló neutrinókkal ütközve Z bozonokat tudnak kelteni (ha energiájuk és az álló neutrinó tömege elég nagy), majd ezek a Z-k többek között protonokra bomlanak. Ezek a protonok (és anti-protonok) lehetnek a detektált nagyenergiás kozmikus részecskék. Tegyük fel, hogy a keltett Z részecske bomlásakor keletkező proton a Z energiájának kb. 1/100-át viszi el (a Z nyugalmi rendszerében). Határozzuk meg a neutrinó tömegét, ha a legnagyobb energiájú ($\approx 3 \times 10^{20}$ eV) detektált proton ilyen módon keletkezett (és a proton a bejövő nagyenergiás neutrinóval azonos irányban repült ki). Hogyan változik az eredmény, ha figyelembe vesszük a protonok szögeloszlását: $p \propto 1 + \cos^2\theta$, ahol θ a kirepülő proton és a bejövő neutrinó által bezárt szög a Z nyugalmi rendszerében?

A neutrinótömeg ilyen meghatározása azon alapul, hogy a Z keltéshez szükséges nagyenergiás neutrinók energiája a neutrinó tömegétől függ. Ezen felbuzdulva Lee ben Canal az alábbi kísérlet ötletével áll elő: Ütköztessünk egymással két neutrinónyalábot! Az egyik nyaláb energiáját tartsuk fixen (kb. a Z tömeg környékén), majd a másik nyaláb energiáját hangoljuk úgy, hogy az ütközés során Z bozonok keltődjenek! Ezek után az előbbi példa mintájára a neutrinótömeg a két nyaláb energiájából kiszámítható. Javasoljuk-e a kísérlet tényleges megvalósítását (feltéve hogy a technikai feltételek adottak a Z energiához közeli, elegendően nagy luminozitású nyalábok létrehozásához)?

(Katz Sándor)

\end{document}