A 31. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2000

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2000-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 31-ik, ezúttal már harmadszor nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2000. november 10 – 20.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok 2000. november 10-én, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (11:00 GMT) magyar és angol nyelven, html, LaTeX és Postscript formátumban letölthetők az Ortvay-verseny weblapjáról

http://ortvay.elte.hu/.

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE Lágymányosi Fizika-Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.64 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható.* Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX vagy Postscript formátumban, vagy – ha nincsenek benne képletek – közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni. Kérjük, hogy csak az alapvető LaTeX style file-okat használják, vagy a felhasznált speciális stilus file-okat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolják a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.64 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722775
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu.

Beadási határidő: november 20. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsüri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

Az idei verseny szponzorai az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, a CAT SCIENCE BT, a KFKI RMKI, a Pro Physica Hallgatói Alapítvány, Horváth István, Serényi Tamás és Major Márton fizikusok. Köszönjük az eddigi támogatásokat – és köszönettel fogadjuk a továbbiakat is.

A verseny eredményhirdetése december 7-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

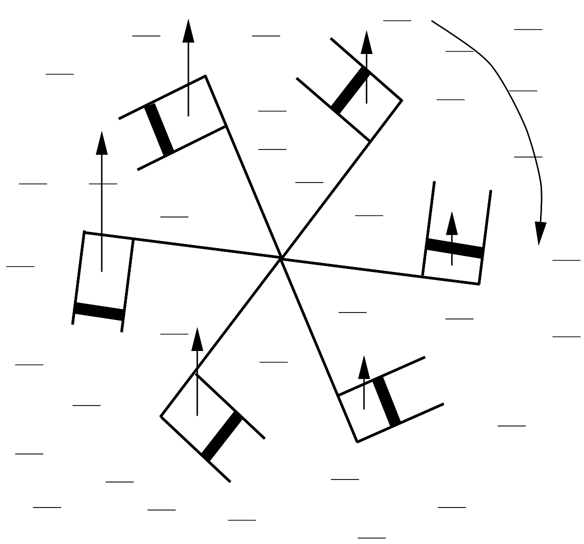
A verseny szervezői: Dávid Gyula, Piróth Attila, Cserti József

1. Egy kutya farkára 10 cm átmérőjű, 500 kg/m^3 sűrűségű tömör fagolyót kötünk. A kutya farka 80 cm hosszú, töve 40 cm magasan van. A farok tömege és vastagsága elhanyagolható. A kutya 1 m/s sebességgel futni kezd. Ha meghallja, hogy a golyó a földhöz csapódott, akkor megduplázza a sebességét (ez a szuperkutya tetszőleges sebességgel tud futni).
   a) Mekkora sebességgel fog futni a szuperkutya elegendően hosszú idő múlva?
   b) Mi az a sebesség, amit a kutya nem fog átlépni akkor sem, ha a golyó sűrűségét tetszőlegesen megnöveljük?

(Szokoly Gyula)

2. Dr. Ivan Schockadtud, a Perpetuum Mobile Telefontársaság alkalmazásában újabb és újabb örökmozgókkal bombázza a Szabadalmi Hivatalt. A Hivatal munkatársa, bizonyos Egykő Albert képtelen volt megbirkózni Dr. Schockadtud legutóbbi modelljével, ezért az Ortvay-versenyzők segítségét kéri. A szerkezet leírása a következő:

   „Kerék-küllőkre merőlegesen hengereket szerelünk, melyekbe ugyanakkora mennyiségű levegőt zárnak be könnyen mozgó, súlyos dugattyúk (lásd az ábrát). A küllők száma legyen legalább három, és a szomszédos küllők közötti



   távolság legyen egyforma. Az egész szerkezetet víz alá helyezzük úgy, hogy a középpontján átmenő, vízszintes tengely körül elforoghasson. Ekkor a lefelé nyíló hengerekben a súlyos dugattyúk miatt nagyobb lesz a levegő térfogata, így ezekre a hengerekre (az ábrán bal oldalon) nagyobb felhajtóerő fog hatni, mint a jobb oldali hengerekre, és az egész szerkezet elkezd az óramutató járásával megegyező irányba forogni."

   Segítsünk Egykő Albertnek, mutassuk meg, hogy a szerkezet nem fog örökké forogni!

(Bihary Zsolt nyomán Farkas Zénó)

3. A bungee jumping egy újabb változata a „katapult": a résztvevőt lerögzítik a földhöz, a gumikötelet daruval megfeszítik, majd a rögzítést kioldják (és így „kilövik" az illetőt). Mindezt természetesen sík terepen teszik. Fennáll-e balesetveszély, ha a) a kilövés függőlegesen történik; b) ha oldalirányba feszítik meg a kötelet?

(Szokoly Gyula)

4. Az űrszemét és a műholdak kölcsönhatását az alábbi egyenlet írja le:

$$\text{Szemét} + \text{Műhold} = \text{sok Szemét}.$$

   Becsüljük meg, hogy mennyi műholdat kell fellőni ahhoz, hogy beinduljon a láncreakció!

(Bodor András)

5. Egy d széles mozgójárda c sebességgel mozog, mi pedig a mozgójárdához képest v sebességgel tudunk gyalogolni. (Ugyanekkora a gyaloglási sebességünk a mozdulatlan talajon is.)

   Milyen pályán mozogjunk, ha a lehető legrövidebb idő alatt akarunk átjutni a mozgójárda egyik oldaláról a másik oldalra, a kiindulási ponttal pontosan szemben levő helyre? Mekkora ez a minimális idő, ha a v/c arány az aranymetszés arányszámánál a) nagyobb; b) kisebb?

(Szokoly Gyula és Gnädig Péter)

6. Egy vékony, hajlékony, nyújthatatlan, elhanyagolható súlyú fonalat egyik végénél befogunk, másik végét pedig átvetjük egy csigán, és egy nagy súlyt akasztunk rá. A befogott vég és a csiga közötti fonálszakasz terheletlen állapotban vízszintes. E fonálszakaszon egy gyöngyszem mozoghat súrlódásmentesen. a) Milyen potenciált érez a gyöngyszem? b) Milyen potenciált érez két felfűzött gyöngyszem, hogyan hatnak kölcsön?

(Borsányi Szabolcs)

7. Egy (hagyományos) lemezjátszó álló korongjára R sugarú tömör gumilabdát (trükklabdát) helyezünk, majd a lemezjátszót bekapcsoljuk. A korong T ideig egyenletes β szöggyorsulással felpörög, majd kikapcsolva T idő alatt leáll. Hogyan mozog a tisztán, csúszás nélkül gördülő trükklabda? (A labda nem esik le a lemezjátszóról.)

(Gnädig Péter)

8. Egy l hosszúságú, súlyos kötelet felső végén egy ω szögsebességgel forgó motor függőleges tengelyéhez erősítünk. A motor bekapcsolása után hosszú idővel a kötél merev testként együtt forog a tengellyel. Milyen a kötél egyensúlyi alakja a forgó koordinátarendszerben? Adjuk meg a kötél alakját (grafikusan is) különböző szögsebességek esetén! Vizsgáljuk meg az $\omega \ll \sqrt{g/l}$, $\omega \approx \sqrt{g/l}$ és $\omega \gg \sqrt{g/l}$ eseteket!

(Gnädig Péter)

9. Egy homokórát súlytalan rúd végére erősítünk, és meglengetjük. A homok közben pereg lefelé. Írjuk le a mozgást!

(Borsányi Szabolcs és Bodor András)

10. Egy kör alakú membránt kissé (kb. 1 százaléknyit) összenyomva ellipszis alakúvá deformálunk. Hogyan módosul a membrán alapfrekvenciája? Meg lehet-e „hallani” ezt az elhangolodást?

(Cserti József)

11. Legyenek m tömegű atomok a $V(\mathbf{r}) = m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)/2$ háromdimenziós potenciálba zárva! A hidrodinamikai tartományban az atomok az ütközések révén lokális egyensúlyban vannak adott $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ sebességeloszlással, $\rho(\mathbf{r},t)$ tömegsűrűséggel és $T(\mathbf{r},t)$ hőmérséklet-eloszlással. Feltételezve, hogy az atomok klasszikus ideális gázként írhatók le, a Boltzmann-egyenlet megoldását az $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \exp\{-\beta(\mathbf{r},t)\xi(\mathbf{p},\mathbf{r},t)\}$ alakban kereshetjük, ahol $\beta(\mathbf{r},t) = 1/k_B T(\mathbf{r},t)$, $\xi(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = [\mathbf{p} - m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)]^2/2m - \mu(\mathbf{r},t)$. A Boltzmann-egyenlet lineáris közelítésében a következő csatolt egyenletek kaphatók a tömegsűrűségre, a sebességtérre és a nyomásra:

$$\partial_t \rho(\mathbf{r},t) = -\nabla[\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)] \approx -\nabla[\rho_0(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r},t)],$$

$$\rho_0(\mathbf{r})\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = -\nabla P(\mathbf{r},t) + \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

$$\partial_t P(\mathbf{r},t) = -\frac{5}{3}\nabla[P_0(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r},t)] + \frac{2}{3}\rho_0(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

ahol $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})/m$, $\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r},t)$, $P(\mathbf{r},t) = P_0(\mathbf{r}) + \delta P(\mathbf{r},t)$ ($\rho_0(\mathbf{r})$ és $P_0(\mathbf{r})$ az egyensúlyi tömegsűrűség és az egyensúlyi nyomás).

Legyen N atom a gázban T_0 egyensúlyi hőmérsékleten! Mik az egyensúlyi $\mu_{eq}(\mathbf{r}) = \mu - V(\mathbf{r})$, $\rho_0(\mathbf{r})$, $P_0(\mathbf{r})$ jellemzők?

Kicsiny amplitúdójú $\delta\rho$, δP, $\mathbf{u}$ zavart keltve az egyensúlyhoz képest, milyen sajátfrekvenciái vannak az atomgáznak? (Segítség: A sajátmódusok kereshetők $\delta\rho(\mathbf{r},t) = \cos(\omega t + \phi_0)\rho_0(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r})$, $\delta P(\mathbf{r},t) = \cos(\omega t + \phi_0)P_0(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})$ alakban, ahol $\rho_1(\mathbf{r})$, $P_1(\mathbf{r})$ véges polinomja x, y, z-nek)?

(Csordás András)

12. A törölköző összehajtogatásakor a hajtási vonal alján igen gyakran egy hátrafelé hajló karima jelenik meg. Mik a karima megjelenésének feltételei? Három vagy négy jellegzetes paraméternél ne használjunk többet a lehetséges esetek jellemzésére! Vizsgáljunk meg különböző összehajtási módszereket! Adjunk elméleti és numerikus leírást!

(Farkas Illés)

13. Tegyünk egy henger alakú csésze teába kristálycukrot, keverjük meg jól, majd vegyük ki a kanalat. Figyeljük meg, hogy hol gyűlik össze a cukor! Egészen mást tapasztalunk viszont, ha a csésze is egyenletesen forog a vízzel együtt, és eközben öntjük bele a cukrot. (Lehetséges, hogy egy kanállal kissé meg kell zavarnunk a vizet ahhoz, hogy a cukorszemcsék szabadon mozoghassanak.) Vizsgáljuk meg a jelenséget kísérletileg, és elméleti magyarázatot is dolgozzunk ki a tapasztaltakra!

(Barna Dániel)

14. Egy hőszigetelő falú, kocka alakú tartályban T_1 hőmérsékletű gáz van, hozzá csatlakozik egy másik, T_2 hőmérsékletű gáztartály. A két részt elválasztó falon egy d átmérőjű lyuk található (az átmérő kicsi a szabad úthosszhoz képest).

a) Milyen nyomás alakul ki a két gáztartályban hosszú idő múlva, ha a hőmérsékleteket kívülről stabilan T_1, illetve T_2 értéken tartjuk?

b) Mekkora eredő erőt fejt ki a gáz a rendszer falára? Honnan származik ez az erő?

c) Mennyi munkát tud végezni a rendszer, ha Q hőmennyiséget vesz fel a környezetétől?

(Gnädig Péter)

15. Mennyi a hatásfoka maximális teljesítmény mellett egy olyan, két (T_1 és T_0 hőmérsékletű) hőtartály között működő hőerőgépnek, amelyben a gép és a tartályok közti hőátadás hővezetéssel történik? A hővezetést az alábbi törvény írja le:

$$dQ/dt = R(T_1 - T_0).$$

(Martinás Katalin)

16. Tekintsünk egy vákuumban súrlodásmentesen szabadon forgó kúpfogaskereket, melynek tengelye merőleges a látóvonalunkra. A kerék legnagyobb kerületi sebességgel felénk mozgó részéről kibocsátott hőmérsékleti sugárzás a Doppler-effektus miatt kékeltolódást szenved, azaz az impulzusa nagyobb lesz. Ezt a sugárzást tükör segítségével vetítsük át a kúpkerék legkisebb átmérőjű, tőlünk távolodó fogas részére! A sugárzás ott elnyelődve nagyobb impulzust ad át a keréknek, mint amennyit az onnan kibocsátott hősugárzás elvisz. A kerék így többlet forgatónyomatékot kap, a fordulatszáma ezért öngerjesztő módon, egyre fokozódó mértékben nőni fog. Vagy mégsem?

(Bódi Zoltán)

17. Egy végtelen hengerre négyzetrácsos ellenálláshálót fektetünk. Az oldalélek ellenállása 1 Ω, a henger keresztmetszeti körére N ellenállás jut. Mekkora az eredő ellenállás egy „hosszanti”, illetve egy „keresztirányú” él két végpontja között? Vizsgáljuk meg először az $N = 2$ és $N = 3$ eseteket, illetve az $N \to \infty$ határesetet!

(Gnädig Péter)

18. Egy kocka oldalélei vékony ellenálláshuzalból készültek. Az egyik csúcsba 1 A-es áramot vezetünk, egy lapátló mentén szomszédos csúcsból pedig elvezetünk 1 A-t. (A csatlakozó vezetékek hosszú, egyenes vezetők, melyek meghosszabbításai a kocka középpontján haladnak keresztül.) Mekkora a mágneses térerősség a kocka középpontjában?

Általánosítsuk a feladatot más szabályos poliéderekre, és határozzuk meg pl. egy szabályos dodekaéder középpontjában a mágneses térerősséget különböző relatív helyzetű be- és kivezetések esetén!

(Radnai Gyula és Gnädig Péter)

19. Adott két C kapacitású kondenzátor, melyek közül az egyik U feszültségre van feltöltve, a másik pedig töltetlen. A kondenzátorokat két párhuzamos, egyenként S keresztmetszetű, egymástól d távolságra lévő, L hosszúságú huzallal összekapcsoljuk. A huzalok és a kondenzátorlemezek ellenállása elhanyagolható, a huzalok hossza pedig sokkal nagyobb a kondenzátorok méreténél. Határozzuk meg a rendszer energiájának időbeli változását!

(Hantz Péter)

20. Két ϵ dielektromos állandójú, nagy területű, vékony szigetelő lap vákuumban egymástól d távolságra párhuzamosan helyezkedik el (d sokkal kisebb a lapok horizontális méreteinél). Mekkora „súrlódási” erő fog hatni közöttük, ha az egyiket v sebességgel mozgatjuk a másikhoz képest?

(Fehér Titusz)

21. Egy $2R\pi$ hosszú, tórusz alakú hullámvezetőben bizonyos módusokban a haladási irányban tekintett elektromos térerősség az $\ddot{E}_z = E_z'' - \kappa^2 E_z$ hullámegyenletnek tesz eleget, ahol E_z''-ben a derivált a hullámvezető irányára vonatkozik. Egy pontban ($z = 0$) egy σ szélességű Gauss-hullámcsomagot helyezünk a rendszerbe. Legyen $\sigma \ll R$ és $\kappa R \gg 1$ ($c = 1$).
Abban a pontban, ahol a csomagot beadtuk, folyamatosan mérjük az $y(t) \equiv E_z(t, z = 0)$ térerősséget.
a) Írjuk fel ezen $y(t)$ függvényt, ismerjük fel, hogy egy tranziens szakaszt egy állandósult, bonyolult rezgés követ!
b) A korai, tranziens időfejlődést tanulmányozva mondjuk meg, az idő milyen függvénye szerint cseng le $y(t)$!
c) Mutassuk meg, hogy a megoldás stacionárius szakasza közelíthető az $\ddot{y}(t) + \eta\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$ egyenletnek megfelelő harmonikus rezgéssel, és határozzuk meg az η és ω paraméterek legjobban illeszkedő értékét az $y(t)$ és időderiváltjai szorzatainak hosszú időre vett átlagolása segítségével!

(Patkós András, Borsányi Szabolcs)

22. Helyezzünk egy „nagy” tömegű nyugvó töltést az origóba! Érkezzen az $x = -\infty$ irányból egy elektromágneses síkhullám, melynek az elektromos tere $E_y(\mathbf{r}, t) = f(x - ct)$ alakú ($f(x)$ egy véges tartományon kívül eltűnik). Írjuk le, hogy hogyan hat kölcsön a síkhullám a töltéssel, hogyan alakul időben a tér és a töltés energiája és impulzusa! Milyen közelítésekkel éltünk (például mit jelent az, hogy „nagy” a test tömege)?

(Fehér Titusz)

23. Egy szupravezető gyűrűben köráramot indítanak el. Egy év múlva megmérik az áramerősséget, és azt találják, hogy az eredeti érték csak kevesebb, mint egy ezrelékkel csökkent. Adjunk (felső) becslést a szupravezető fajlagos ellenállására! Legyen a szupravezető gyűrű 1 cm sugarú, kör keresztmetszetű „toroid”, a vezeték keresztmetszetének sugara pedig 1 mm.

(Fehér Titusz)

24. Párizsba repülve a gépnek a nappal ellentétes oldalán ültem az ablak mellett, és így nyugodtan szemlélhettem a repülőgép árnyékát. A felhőkön az árnyék körül szivárványgyűrűk látszottak. Határozzuk meg a repülőgép által gerjesztett nyomáskülönbségek okozta fényelterítést különböző színű fényekre!

Ha nem volt alattunk felhő, akkor a földön (amely jóval messzebb volt, mint a felhők) már nem lehetett kivenni a színes gyűrűket – amelyeknek nyilván nem lenne elég fénytartalma –, ellenben a sokkal kisebb árnyék körül jól látható fényintenzitás-változás volt megfigyelhető az árnyéktól való távolság függvényében. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget is!

(Török János)

25. A világűrből óriási energiájú részecskék érkeznek a földre. Eddig 14 olyan részecskét (nagy valószínűséggel protont) detektáltak, melynek energiája 10^{20} eV fölött volt. Ezen részecskék forrása ismeretlen. Érdekes tulajdonságuk, hogy a 14-ből kettőt a mérési hibán belül azonos irányból detektáltak. (Ha a 4×10^{19} eV felett detektált részecskéket tekintjük, akkor magasabb multipletteket is látunk: 92 eseményből 7 dublett és 2 triplett volt).

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ilyen multipletteket kapunk a két esetben (14, illetve 92 esemény), ha a részecskék minden irányból azonos valószínűséggel érkeznek a Földre, és a detektor csak 3°-nál nagyobb eltérést tud megkülönböztetni!

b) A multiplettek kialakulásának egy másik oka az lehet, hogy a nagy energiás részecskék véges számú pontszerű forrásból érkeznek, és az azonos irányból detektált részecskék ugyanabból a forrásból jönnek. Adjuk meg a források számának legvalószínűbb értékét egy 50 Mpc-es gömbön belül a következők felhasználásával:

- A források egyenletes eloszlásúak; egy 50 Mpc sugarú gömbre átlagosan N forrás jut.
- Valamennyi forrás azonos intenzitással, Poisson-eloszlással bocsát ki protonokat.
- A protonok veszítenek energiájukból: r távolság megtétele után a 10^{20} eV feletti energiájú protonok száma $e^{-r/R}$-el arányos, ahol $R \approx 50$ Mpc.
- eddig 14 eseményt detektáltak 10^{20} eV felett, ezek közül 2 jött egy irányból.
- A detektor az északi félgömbön van 45°-os szélességnél. Vegyük figyelembe, hogy a detektor egy adott időpillanatban nem látja a teljes eget!

(Katz Sándor)

26. Adott egy fizikai folyamat, melynek egy fizikai jellemzőjét megmérjük, pl. földrengések esetén a rengés erősségét vagy a hosszát (mennyi ideig tartott a rengés).

1000 mérést elvégezve akarjuk ellenőrizni a mért fizikai mennyiség eloszlására vonatkozó elméleti elképzelést: pl. követi-e a feltételezett Gauss-eloszlást.

a) Milyen módszerrel határozhatjuk meg, hogy az 1000 darab $x_1, x_2, \ldots x_{1000}$ mért adat összeegyeztethető-e az elmélet szerinti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel?

b) Egy másik elmélet szerint két egymástól különböző folyamat is létrehozhatja a földrengést (használjuk ezt a példát). Ekkor a fizikai jellemző (pl. a folyamat hossza) két egymástól (esetleg) különböző sűrűségfüggvénnyel jellemezhető.

Legyen ez a két függvény konkrétan két Gauss-eloszlás, melyek szórása és középértéke különbözhet. Milyen módszerrel állapítható meg az 1000 mért adatból, hogy a sűrűségfüggvény jellemzésére elegendő egy Gauss-eloszlás, vagy szükség van arra a feltételezésre, hogy két Gauss-eloszlás összege írja le a valódi sűrűségfüggvényt?

(Horváth István)

27. Álljunk meg a koordinátarendszer origójában, kezünkben egy erős fényű, párhuzamos fénynyalábot kibocsátó zseblámpával! Az x tengely irányába mutató állandó V sebességgel, tőlünk az y tengely irányában mért d távolságban elhalad mellettünk egy kocka, melynek lapjai (nyugalmi rendszerében) a koordinátasíkokkal párhuzamosak. Mint közismert (lásd pl.: Taylor–Wheeler: *Téridő-fizika* című könyvét), ha egy test relativisztikus sebességgel elhalad mellettünk, akkor nem mozgásirányban összenyomódni látjuk (ahogy az a Lorentz-transzformáció naív értelmezéséből következne), hanem elfordulva látjuk a testet. A fentiek szerint a kocka hátsó lapja egy kissé felénk fordul. Világítsuk meg a kockát az y tengely irányába kibocsátott párhuzamos fénynyalábbal! Mekkora lesz a megvilágítás erőssége a mozgás irányával párhuzamos, felénk néző oldallapon, és a felénk elfordult hátsó lapon? Nincs itt valami gubanc vagy ellentmondás? Merre is fordult igazából az a kocka? Írjuk le a történteket a kocka koordinátarendszeréből nézve is!

(Dávid Gyula)

28. Dolgozzuk ki az általános NEM-relativitás elméletét (ÁNRE)! Azaz fogadjuk el a szokásos általános relativitáselmélet (ÁRE) alapgondolatát, mely szerint a gravitáció jelenségkörének oka a tér, illetve a téridő anyag általi meggörbítése, és a (kizárólag gravitációs hatás alatt álló) testek pályája e görbült sokaság legegyenesebb vonalaival egyezik meg! Ne vegyünk azonban tudomást a speciális relativitáselméletben tárgyalt jelenségekről, a fénysebesség invariáns, illetve határsebesség voltáról – azaz fogadjuk el a gravitációmentes téridő Galilei–Newton-féle modelljét.

Milyenek lesznek az ÁNRE mozgásegyenletei, illetve gravitációs téregyenletei? Milyen ismert jelenségeket tud leírni ez a modell (legalábbis kvalitatív módon), és milyeneket nem? Javasoljunk olyan kísérletet, amely eldöntheti, hogy az ÁRE vagy az ÁNRE a helyes elmélet! Van-e olyan jelenség, amit az ÁNRE jobban (vagy legalábbis megnyugtatóbban) ír le, mint a szokásos ÁRE? Van-e az ÁNRE-ben fekete lyuk, fehér lyuk és ősrobbanás?

(Dávid Gyula)

29. Kvantáljuk meg a

$$H(p_x, x, p_y, y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2a}(x-y)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{\lambda}{24}(x^4+y^4)$$

Hamilton-függvénnyel megadott rendszert! Határozzuk meg a vákuumot és az első gerjesztett állapotot. Adjuk meg az egy- és kétrészecske-állapotok energiáját λ^2 rendben! Írjuk fel x és y várható értékének effektív mozgásegyenletét!

(Borsányi Szabolcs)

30. Vizsgáljuk az elektront egy téglaltest alakú dobozban, amelyet az egyik falával párhuzamosan két részre osztunk. A két térrészben az elektron effektív tömege különböző. A doboz határán a hullámfüggvény zérus. Mi a hullámfüggvényre felírt határfeltétel a két térrész határán? Határozzuk meg az energia-sajátértékeket!

(Cserti József, Tichy Géza)

31. Az EPR kísérletekben a forrás egy feles spinű részecskéből álló párt sugároz ki, W_s szinglett állapotban. A részecskéken spin-mérést hajtunk végre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, illetve $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ irányokban. A laboránsok szabadon (pénzfeldobással, ha tetszik) választanak a két lehetséges mérés közül. A kvantummechanikából kiszámíthatjuk annak a valószínűségét, hogy az $\mathbf{a}$- irányú mérés „up” eredményt ad: $p(A) = tr\,(W_s P_A) = 1/2$. Az is egyszerű számítással meghatározható, mi annak a valószínűsége, hogy a bal oldali $\mathbf{a}$-mérés eredménye is és a jobb oldali $\mathbf{b}$-mérés eredménye is „up”:

$$p(A\&B) = tr\,(W_s P_A P_B) = \frac{1}{2}\ \sin^2\left(\frac{1}{2}\measuredangle\,(\mathbf{a},\mathbf{b})\right).$$

Egy tipikus mérési szituációban a négy irány egy síkban van, és a bezárt szögek $\measuredangle\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \measuredangle\,(\mathbf{a},\mathbf{b}') = \measuredangle\,(\mathbf{a}',\mathbf{b}') = 120°$, illetve $\measuredangle\,(\mathbf{a}',\mathbf{b}) = 0$. Ilyenkor a kvantumvalószínűségek: $p(A) = p(A') = p(B) = p(B') = 1/2$, illetve $p(A\&B) = p(A\&B') = p(A'\&B') = 3/8$ és $p(A'\&B) = 0$. Ezeket a kísérleteket a valóságban is sokszor elvégezték, és pontosan ezeket az eredményeket kapták.

Töltsük ki egy ilyen kísérlet egy lehetséges laboratóriumi jegyzőkönyvét! Vagyis töltsük ki az alábbi táblázatot úgy, hogy a belőle leszámolt relatív gyakoriságok a kvantummechanikai eredményekkel egyezzenek meg, mondjuk 1/1000 pontossággal!

n	A	A'	B	B'	$A\&B$	$A\&B'$	$A'\&B$	$A'\&B'$
1	1	0	0	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(Szabó László)

32. Egy forrás ellentétes irányokban egy részecskepárt bocsát ki. A pár tagjait egymástól és a forrástól távol elhelyezkedő A és B detektorok észlelik. Mindkét detektoron egy-egy kétállású kapcsoló és mindkettőn egy piros (P) és egy zöld (Z) lámpa van. Miután a részecskék elindultak a detektorok felé, de még odaérkezésük előtt, a detektorok kapcsolóit külön-külön, függetlenül és véletlenszerűen vagy az 1-es vagy 2-es állásba kapcsoljuk. A részecskék beérkezésekor mindkét detektoron az egyik lámpa a kettő közül kigyullad. A kísérletet sokszor megismételve a következőket észleljük:

a) Ha a két detektor kapcsolója különböző állásban van, akkor sohasem gyullad ki mindkét detektoron Z lámpa: A1Z, B2Z és A2Z, B1Z soha nem következik be.

b) Ha mindkét detektor kapcsolója az 1-es állásban van, akkor sohasem világít mindkét detektoron P lámpa: A1P, B1P soha nem következik be.

c) Ha mindkét detektor kapcsolója a 2-es állásban van, akkor néha mindkét detektoron a Z lámpa világít: A2Z,B2Z időnként előfordul.

Mutassuk meg, hogy az eredmények magyarázata ellentmondásra vezet, ha a következő ésszerűnek látszó föltételezéseket tesszük:

(i) a detektorok egymás eredményeit nem befolyásolják;

(ii) az, hogy a detektoron milyen lámpa gyullad ki, legföljebb az oda érkező részecske valamilyen tulajdonságától függhet, de semmiképpen nem befolyásolhatja azt a másik, távoli detektorba jutó részecske valamilyen tulajdonsága;

(iii) a részecskék tulajdonságai közötti korrelációk nem függnek a detektorok kapcsolóinak beállításától.

Mely körülmények indokolják a fönti föltételezéseket? Kétállapotú kvantum részecskéket föltételezve adjuk meg a részecskepárok olyan kvantummechanikai állapotát, amely a fönti megfigyelési eredményeket produkálná! Tegyük föl, hogy a forrás minden alkalommal ugyanolyan kvantumállapotú párokat bocsát ki! Mekkora lehet a c) pontban jelzett A2Z, B2Z esemény maximális valószínűsége?

(Benedict Mihály)

33. Minden jólnevelt gyerek tudja, hogy két fermion kötött állapota egy bozon. Bumburnyák azonban rosszul nevelt, és értetlenkedik. Dúl-fúl magában: „Egy hidrogénatomban van két fermion, tehát ő bozon kellene, hogy legyen. Amíg azonban száz bozont könnyedén bepakolok egy állapotba, száz H atommal ez biztosan nem sikerülne. A dolog eleve kudarcva van itélve, hiszen minden H atomban ott van egy elektron, és azokat nem lehet ugyanabba az állapotba rakni." Hogy Bumburnyákot megfelelő oktatásban részesítsük, tekintsük a következő nemrelativisztikus kvantummechanikai modellt! Legyen

$$\mathcal{H}_{2\mathrm{B}} = \{\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{C}) | \, \psi \text{ szimmetrikus}\}$$

egy két azonos nullás spinű bozonból álló rendszer Hilbert-tere, melyen a forgatások, a térbeli eltolások és a Galilei-transzformációk a szokásos módon ábrázolódnak:

$$\psi \to \psi'(x_1, x_2) = e^{imv(x_1+x_2)}\, \psi\left(F^{-1}x_1 - a, F^{-1}x_2 - a\right),$$

ahol F egy forgatás, a egy térbeli eltolást megadó térvektor, v egy Gallilei-transzformációt megadó sebességvektor, m a bozonok tömege. Jelöljük az így kapott repezentációt $U_{2\mathrm{B}}$-vel. Az így megadott Hilbert-tér és ábrázolás mintájára megadhatjuk a négy feles spinű, azonos fermion leírására szolgáló $\mathcal{H}_{4\mathrm{F}}$ Hilbert-teret és rajta az $U_{4\mathrm{F}}$ unitér sugárábrázolást. A kölcsönhatási Hamilton-operátorról mindössze annyit tételezünk fel, hogy csak kétfermion kölcsönhatásokat tartalmaz, továbbá hogy létezik zérus spinű és zérus pályaimpulzusmomentumú kötött állapot, és a relatív koordinátákban felírt, legalacsonyabb ennergiájú ilyen kötött állapot egyértelmű.

Annak matematikai megfogalmazása, hogy négy fermion bizonyos állapotai kétbozon állapotnak tekinthetők, a következő: megadható $\mathcal{H}_{4\mathrm{F}}$ egy olyan M zárt lineáris altere, melyre $U_{4\mathrm{F}}$ megszorítható, és ez ekvivalens $U_{2\mathrm{B}}$-vel.

Adjunk meg egy ilyen M-et, és az ekvivalenciát létesítő V unitér (vagy antiunitér) operátort! Hogyan néz ki a $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ kétbozon állapot képe $\mathcal{H}_{4\mathrm{F}}$-ben?

(Weiner Mihály)

34. Egyatomos lineáris lánc Hamilton-operátora (függvénye)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\sum_{n=1}^{N} p_n^2 + \frac{\mu^2}{2}\sum_{n=1}^{N} u_n^2 + \frac{D}{2}\sum_{n=1}^{N-1}(u_{n+1} - u_n)^2\,,$$

ahol p_n és $u_n = x_n - na$ az n-ik atom impulzusa, ill. elmozdulása (a a rácsállandó). Az első atomra $f = f_0 \cos \omega t$ kényszererő hat.

Számítsuk ki, mekkora energiát vesz fel a lánc egységnyi idő alatt!

(Sasvári László)

35. Helyezzünk egy elektronokból és Z töltésű, M atomszámú ionokból álló plazmafelhőt homogén B mágneses térbe! A mágneses tér vektora az x tengely irányába mutat. A töltött részecskék Larmor-pályán mozognak az erővonalak körül. Ha a Larmor-pálya sugara sokkal kisebb, mint a felhő mérete, akkor a részecskék mozgása egydimenziósnak tekinthető az x tengely mentén. A $t = 0$ időpontban a felhő egy x tengely mentén L hosszúságú négyzetes hasáb alakú tartományban helyezkedik el, amelynek mérete a mágneses térre merőlegesen legyen d. A tartományon belül az ionok sűrűségeloszlása egyenletes n_i, az elektronoké $n_e = Zn_i$, tehát a plazma semleges.

   Az egyszerűseg kedvéért tegyük fel, hogy az ionok hőmérséklete zérus ($T_i = 0$), és az elektronok valamilyen T_e kezdeti hőmérséklettel rendelkeznek. Feltesszük, hogy a Debye-hossz ($\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k T_e / n_e q_e^2}$) sokkal kisebb, mint a rendszer karakterisztikus mérete.

   Ha a plazma sűrűsége olyan, hogy a részecskék átlagos szabad úthossza nagyobb, mint a tartomány mérete, akkor az ütközésektől teljesen eltekinthetünk. Ilyen körülmények gyakran előfordulnak magashőmérsékletű laboratóriumi plazmákban.

   Mi történik, ha $t = 0$ időben magára hagyjuk a rendszert? Milyen viselkedést mutat rövid és hosszú időskálán? Törekedjünk először egy kvalitatív kép kialakítására a folyamatokról!

(Zoletnik Sándor)

36. — Pistike, miért nem takarítottad ki a szobádat?
   — Olvastam, hogy minden tevékenység növeli a világ rendezetlenségét, az Univerzum entrópiáját. Én pedig igenis törődöm azzal, milyen világot hagyok utódaimra!

   Igaza van-e Pistikének? Szabad-e takarítanunk, ha a jövőnkre is gondolunk?

(Martinás Katalin)

37. Elvetődsz egy lakatlan szigetre, ahol a kannibálok főnöke emigyen szól: Itt egy feles spin. Azt mérsz rajta, amit akarsz. Utána mi jövünk, és megmérjük a spint véletlenszerűen az x, y, vagy a z irányban. Utána alszunk egyet, és másnap reggel mérhetsz még egyet. Ha megmondod hogy a mi mérésünknek + vagy − volt az eredménye, szabadon engedünk. Ha tévedsz, az üstben végzed!

   a) Milyen mérési stratégiával maximálizálhatod túlélési esélyedet?

   Nincs nagy baj – gondolod magadban, ám a törzsfőnök folytatja: Van nekem három csintalan gyerkőcöm a volt asszonyomtól, Dekoherenciától: Szigmaix, Szigmaipszilon és Szigmazé. Akárhogy őrizzük is a Szent Spint, ezek közül a lókötők közül egy mindenképpen megpróbál majd behatolni éjszaka a szent sátorba, és ha bejut, akkor operál is a spinen a nevének megfelelően. Szimpatikus vagy nekem, ezért ha nagyon akarod, állíthatok őrt a sátor elé, akkor a kölök csak 60% valószínűséggel jut be a sátorba.

   b) Mit válaszolsz a törzsfőnöknek? Hogyan változik a stratégiád, és hogyan változnak túlélési esélyeid?

(Bihary Zsolt és Peták Attila)

\end{document}